

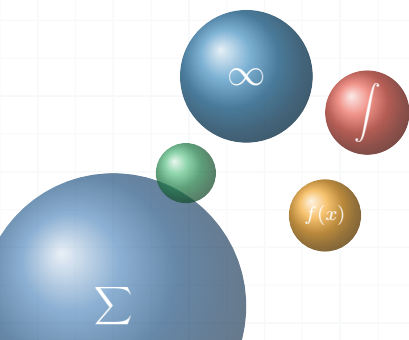
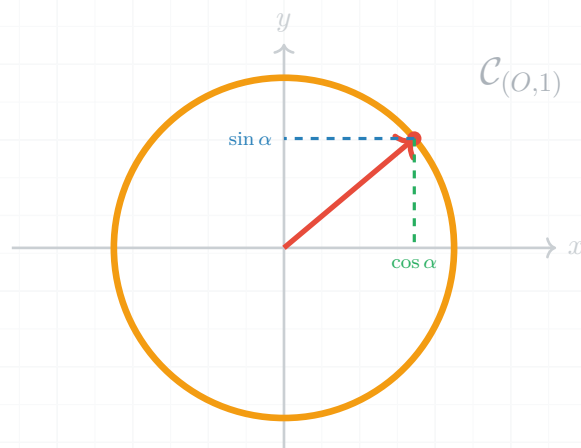
TRONC COMMUN SCIENTIFIQUE



CAHIER SCOLAIRE COMPLET

COURS & EXERCICES

Mathématiques



Séries d'exercices N°1

Ensemble des nombres entiers naturel \mathbb{N} et notions en arithmétique

1 Ensemble des nombres entiers naturel \mathbb{N}

Compléter à l'aide du symbole le plus approprié

parmi : \in ; \notin ; \subset ; $\not\subset$

$\frac{15}{3} \dots \mathbb{N}$; $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} \dots \mathbb{N}$; $3 \dots \{1, 2, 3, 4\}$;
 $\{1, 3, 5\} \dots \{1, 3, 4, 6, 9\}$; $0 \dots \mathbb{N}^*$; $-2 \dots \mathbb{N}$

2 Les nombres pairs et les nombres impairs

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la parité de chacun des nombres suivants :

$4n + 3$; $2n^2 + 4n + 2025$; $2^{n+1} + 2025$;
 $1 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2$; $n^2 + n$; $n^2 + n + 3$;
 $n^2 + 5n + 3$; $5n^2 + 3$; $4n^2 + 1$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a = n^2 + 3n + 3$

a) Vérifier que $a = (n + 1)(n + 2) + 1$

b) En déduire la parité de a

3 Multiples et Diviseurs

1) Soit a et b deux entiers naturels impairs. Montrer que $a^2 + b^2 - 2$ est un multiple de 8.

2) Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3.

3) Montrer que la somme de deux entiers naturels impairs consécutifs est un multiple de 4.

4) Montrer que la somme de trois entiers naturels pairs consécutifs est un multiple de 6.

5) Montrer que la somme de trois multiples consécutifs de 3 est un multiple de 9.

6) a) Montrer que si un entier naturel est multiple de 36 alors il est multiple de 9.

b) La réciproque de cette propriété est-elle vraie? (Justifier votre réponse)

7) a) Écrire en extension D_{22} l'ensemble des diviseurs de 22.

b) Résoudre dans \mathbb{N}^2 l'équation :

$$(x + 2)(y + 1) = 22.$$

4 Nombres premiers

1) Déterminer parmi les nombres suivants ceux qui sont premiers : 57; 59; 149; 221; 437.

2) Donner la décomposition en facteurs premiers de : 2025×2026 ; $7^{24} \times 14^{2025}$; 250000000.

3) On considère les nombres entiers naturels a et b tels que : $a = 90 \times 2^2$ et $b = 18 \times 5^3$

a) Décomposer a et b en produit de facteurs premiers.

b) Simplifier : \sqrt{ab} et $\frac{a}{b}$

c) Montrer que pour tout entier naturel n , le nombre $n^2 + 5n + 6$ est composé

5 PPCM et PGCD

1) a) Décomposer les deux nombres $a = 600$ et $b = 504$ en produit de facteurs premiers.

b) En déduire $PGCD(a, b)$ et $PPCM(a, b)$ puis vérifier dans ce cas que :

$$PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = a \times b$$

c) Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de : $a^2 \times b^3$.

d) Déterminer le plus petit entier naturel m tel que ma soit un carré parfait.

e) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que nb soit un cube d'un entier naturel.

f) Simplifier : $\frac{a}{b}$ et \sqrt{ab}

2) Montrer que pour tout entier naturel n , l'entier $n(n + 1)(n + 2)$ est divisible par 6

3) Le nombre d'élèves d'une classe est inférieur ou égal à 40. Si on range les élèves par groupe de 12 ou par groupe de 9, il en reste 1 à chaque fois. Quel est le nombre d'élèves de cette classe?

Séries d'exercices N°2

Calcul vectoriel dans le plan

1 Egalité de deux vecteurs

- 1) Soit $ABCD$ un parallélogramme, E le symétrique de A par rapport à D
- Construire la figure.
 - Montrer que $DBCE$ est un parallélogramme
- 2) Soit $ABCD$ est un parallélogramme. E, F et G sont les symétriques respectifs de A, B et D par rapport à C
- Construire la figure.
 - Montrer que $DCEF$ est un parallélogramme
 - Montrer que $EF CG$ est un parallélogramme

2 Opérations sur les vecteurs-Définition vectorielle du milieu d'un segment

- 1) Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soient I et J deux points tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DJ} = 2 \overrightarrow{AD}.$$

- Construire la figure.
 - Montrer que : $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ} = 2 \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$
 - En déduire que les points C, I et J sont alignés.
- 2) Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. les points $E; F; G$ et H sont les milieux respectifs des segments $[AB]; [BC]; [CD]$ et $[DA]$
- Faire une figure
 - Montrer que $EF GH$ est un parallélogramme.

3 Colinéarité de deux vecteurs

- 1) Soient $A; B; C$ trois points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ et soit \vec{u} un vecteur du plan tel que $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
- Démontrer que \vec{u} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires
- 2) soit ABC un triangle .
- construire les deux points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$
 - Montrer que $(CE) // (FB)$
- 3) Soient A, B, C et M quatre points du plan et soit \vec{u} le vecteur défini par : $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$.
- Montrer que : $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
 - Soit \vec{v} le vecteur défini par : $\vec{v} = 2\overrightarrow{BA} - 6\overrightarrow{BC}$. Montrer que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
- 4) Soient ABC un triangle
- Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$
 - Exprimer les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BN} en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}
 - Montrer que les droites (AM) et (BN) sont parallèles
- 5) Soient ABC un triangle
- Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
 - Soit I le point tel que $2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
Montrer que le point I est le milieu du segment $[AC]$
 - les points $M; I$ et N sont-ils alignés ?

Séries d'exercices N°3

La projection dans le plan

1 La projection sur une droite

$ABCD$ un parallélogramme de centre I , la parallèle à (AD) passant par I coupe (AB) en M et coupe (DC) en N .

1) Construire la figure.

2) soit

- p_1 la projection sur (AC) parallèlement à (BC)
- p_2 la projection sur (AC) parallèlement à (AD)
- p_3 la projection sur (DC) parallèlement à (AD)
- p_4 la projection sur (DC) parallèlement à (BC)
- p_5 la projection sur (MN) parallèlement à (DC)

Déterminer $p_1(A)$; $p_2(B)$; $p_3(B)$; $p_4(M)$; $p_5(B)$

2 Théorème de Thalès : sens direct et sens réciproque

1) Soit ABC un triangle tel que $AB = 8\text{cm}$.
 $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ tel que $AM = 2\text{cm}$
et $AN = 3\text{cm}$.

Calculer NC sachant que $(MN) \parallel (BC)$

2) Soit $[AB]$ un segment. utiliser uniquement le compas et une règle non graduée pour diviser $[AB]$ en cinq parties égales

3 Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs - Ecriture vectorielle du théorème de Thalès

1) Soit un triangle ABC et M un point de la droite (AB) distincts de A et N un point de la droite (AC) distincts de A et soit $k \in \mathbb{R}^*$.

a) Montrer que si $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC} \end{cases}$ alors

$$\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$$

b) Montrer que si $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \\ (MN) \parallel (BC) \end{cases}$ alors

$$\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$$

2) Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O .
Soit A' le projeté de A sur (DC) parallèlement à (BD) .

a) Montrer que $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{DC}$.

b) Soit E un point de (BC) tel que A' est le projeté de E sur (DC) parallèlement à (BD) .

i) Construire le point E .

ii) Montrer que A est le milieu de $[EA']$.

c) La droite (EO) coupe (AB) en H et (DC) en R .

i) Montrer que H est le milieu de $[ER]$ et que O est le milieu de $[HR]$.

ii) Calculer \overrightarrow{EO} en fonction de \overrightarrow{ER} .

Séries d'exercices N°4

Les ensembles \mathbb{N} ; \mathbb{Z} ; \mathbb{D} ; \mathbb{Q} et \mathbb{R}

1 Les différents ensembles de nombres

1) Compléter les pointillés par le symbole qui

convient (\in ou \notin)

a) $\frac{\sqrt{5^2 - 3^2}}{4} \dots \mathbb{N}$

b) $\frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{5}}{-\frac{1}{3} + 1} \dots \mathbb{Z}$

c) $\sqrt{2} \dots \mathbb{Q}$

d) $\frac{-(\sqrt{2})^4}{4} \dots \mathbb{Z}$

e) $-\frac{1}{3} \dots \mathbb{D}$

f) $\frac{3}{125} \dots \mathbb{D}$

g) $-23.83 \dots \mathbb{D}$

h) $-\frac{21}{3} \dots \mathbb{Z}$

i) $\frac{\pi^2 - 7\pi}{14\pi - 2\pi^2} \dots \mathbb{Q}$

j) $\sqrt{(-2)^2} \dots \mathbb{Z}^-$

2) Pour chacune des propositions suivantes, préciser

s'elle est vraie ou bien s' elle est fausse :

a) si $x \in \mathbb{D}$ alors $x \in \mathbb{Q}$

b) si $x \notin \mathbb{D}$ alors $x \in \mathbb{Q}$

c) si $x \notin \mathbb{D}$ alors $x \in \mathbb{Q}$

d) si $x \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Q}^*$ alors $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$

e) si $x \in \mathbb{D}$ et $x \in \mathbb{D}^*$ alors $\frac{x}{y} \in \mathbb{D}$

3) Mettre sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$

-1 ; 6 ; -2.18 ; $\frac{21}{75}$; 22.11 ; 0.914

4) Montrer que $\frac{12}{75} \in \mathbb{D}$

5) Montrer que Si $x = \frac{p}{2^n \times 5^m}$ avec p ; m et n des entiers naturels alors $x \in \mathbb{D}$

6) a) Rappeler la définition d'un nombre décimal

b) Rappeler le critère de divisibilité par 3

c) Démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

2 Les Opérations dans \mathbb{R}

1) Calculer puis simplifier le résultat si possible

a) $A = \sqrt{27} + 2\sqrt{12} - 5\sqrt{75}$

b) $B = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{75}}{\sqrt{5} \times \sqrt{90} + \sqrt{24} \times \sqrt{12}}$

c) $C = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

d) $D = \frac{52}{\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8}}}} - 3$

2) Factoriser dans \mathbb{R}

a) $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

b) $Q(x) = x^3 + 2x + 12$

c) $R(x) = x^6 - 1$

d) $S(x) = x^4 + 5x^2 - 36$

3 Les puissances et leurs propriétés

1) Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$a = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5^4}{2^3 \times 3 \times 5^3}$; $b = \frac{2^{-1} \times 5}{5^2 \times 3^{-2} \times 6^3}$;

$c = \frac{2^6 \times 10^{-3} - 3^2 \times 10^{-2}}{13 \times 10^{-2}}$

2) Déterminer les deux entiers naturels n et m tel que $4^n \times 11^m = 1936$

4 Ecriture Scientifique d'un nombre décimal

Sans utiliser de calculatrice , Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$x = 311$; $y = 0.002017$; $z = 222.22$;

$t = 3 \times 10^3 \times 8 \times 10^{-7}$; $u = \frac{12 \times 10^{-2}}{60 \times (10^{-3})^3}$

Séries d'exercices N°5

Ordre dans \mathbb{R}

1 Ordre et opérations

1) Sans utiliser la calculatrice, comparer les nombres suivants a et b dans chacun des cas suivants :

- $a = \frac{2}{5}$ et $b = \frac{2}{5 + \sqrt{3}}$
- $a = 2\sqrt{3}$ et $b = 3\sqrt{2}$
- $a = 2,13 \times 10^{-3}$ et $b = 0,00205$
- $a = 3\sqrt{2} + \sqrt{17}$ et $b = 4 + \sqrt{19}$
- $a = \frac{5}{9^7}$ et $b = \frac{1}{9^8}$

2) soit x un nombre réel tel que $3 < x < 4$. On pose $A = 4 - x$

Classer les nombres A , A^2 et A^3 par ordre croissant

3) a) Soit a et b deux nombres réels. Comparer : $a^2 + b^2$ et $2ab$

b) En déduire que, pour tous réels x, y et z , on a $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$

4) Soient a et b deux réels positifs

- a) Montrer que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
- b) Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$
- c) Montrer que $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

2 Intervalles

1) traduire sous forme d'intervalle ou sous forme d'intersection ou réunion d'intervalles

- a) $-1 \leq x < 1$ signifie $x \in \dots\dots\dots$
- b) $0 \geq x > -1$ signifie $x \in \dots\dots\dots$
- c) $x \neq 0$ signifie $x \in \dots\dots\dots$
- d) $x < 0$ signifie $x \in \dots\dots\dots$
- e) $x \neq -1$ et $x \neq 1$ signifie $x \in \dots\dots\dots$
- f) $x > -1$ et $x < 1$ signifie $x \in \dots\dots\dots$
- g) $x > -1$ ou $x < 1$ signifie $x \in \dots\dots\dots$
- h) $x < -1$ et $x < 1$ signifie $x \in \dots\dots\dots$
- i) $x < -1$ ou $x < 1$ signifie $x \in \dots\dots\dots$

2) On pose $I = [-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}[$ et $J = [-\frac{1}{2}; 3[$. vrai ou faux ?

- | | | |
|------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| a) $\frac{1}{2} \in I$ | c) $2 \in J$ | f) $\frac{1}{2} \in I \cup J$ |
| b) $\frac{1}{3} \in I$ | d) $3 \in J$ | |
| | e) $I \cap J \neq \emptyset$ | |

3 La valeur absolue et ses propriétés

1) Écrire sans le symbole de valeur absolue.

- a) $A = |3 - 7 + 11 - 20|$
- b) $B = |3 - \pi|$
- c) $C = |\sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{7}|$
- d) $D = |3\sqrt{2} - 2| - |2\sqrt{2} - 3| + |\sqrt{2} - 2|$

2) traduire sous forme d'intervalle ou sous forme de réunion d'intervalles

- $|2x - 3| \leq 1$
- $|x + 6| > 5$
- $1 < |x| \leq 3$

3) On donne $A = |2x + 4| + |x - 2|$.

- a) Écrire A sans le symbole de valeur absolue.
- b) Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant l'équation $A = 5$.
- c) Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant l'inéquation $A \leq 8$.

4 Encadrement et approximations

1) On considère le nombre suivant :

$$X = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$

- a) Montrer que $X > 0$
- b) Calculer X^2
- c) Montrer que $X = \sqrt{10 - 2\sqrt{13}}$

2) On prend 3,6 comme valeur approchée de $\sqrt{13}$ à 10^{-2} près

- a) Montrer que $2,78 < 10 - 2\sqrt{13} < 2,82$
- b) Vérifier que $2,56 < 10 - 2\sqrt{13} < 2,89$
- c) En déduire que 1,6 est une valeur approchée de X à 10^{-1} près.
(On donne $\sqrt{256} = 16$ et $\sqrt{289} = 17$)

3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose $A = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

- a) Montrer que $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1}$
- b) Montrer que $\sqrt{1+x^2} + 1 \geq 2$
- c) En déduire que $|A - \frac{1}{x}| \leq \frac{1}{2}|x|$
- d) déterminer une valeur approchée du nombre $\frac{\sqrt{0,0001+1}}{0,01}$ à 5×10^{-3} près.

4) a) Encadrer le nombre $10\sqrt{3}$ par deux nombres entiers consécutifs.

b) En déduire une approximation décimale de $\sqrt{3}$ à 10^{-1} près par défaut.

Séries d'exercices N°6

Étude analytique de La droite dans le plan

1 coordonnées d'un point et d'un vecteur

- 1) Soient $A(-3,2)$, $B(2,-2)$, $C(-1,-1)$ et $D(x,y)$ quatre points du plan muni du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- Déterminer les coordonnées du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
 - Déterminer les coordonnées du point G telles que : $\vec{GA} + \vec{GB} - 3\vec{GC} = \vec{0}$.
- 2) $ABCD$ est un carré de côté 1 dans le plan. On considère le repère (A, \vec{AB}, \vec{AD}) et On note : I le milieu de $[AB]$, et J le centre du carré $ABCD$. Les points R et S sont définis par : $\vec{AR} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AS} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$. et soit K le milieu du segment $[RS]$.
- Calculer les coordonnées des points I et J dans le repère (A, \vec{AB}, \vec{AD}) .
 - Vérifier que $R(\frac{1}{3}, 0)$ et $S(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
 - Calculer les coordonnées du point K .
 - Montrer que les points I , K et J sont alignés.

2 Condition de colinéarité de deux vecteurs

- 1) Dans le plan (\mathcal{P}) muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$; on considère les points : $A(1,4)$, $B(7,10)$ et $C(t, t+3)$. avec $t \in \mathbb{R}$
Montrer que les points A , B et C sont alignés pour toute valeur de t
- 2) Dans le plan (\mathcal{P}) rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$; on considère les points : $A(\frac{1}{2}; 3)$, $B(-2; -2)$ et $C(1; 4)$ et le vecteur $\vec{u}(1; 3)$.
- Déterminer le réel x pour que les vecteurs \vec{u} et $\vec{v}(x-2, 5)$ soient colinéaires.
 - Montrer que les points A , B et C sont alignés.

3 Équation cartésienne d'une droite

- 1) Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite (D)
- $(D) = (ox)$: l'axe des abscisses
 - $(D) = (oy)$: l'axe des ordonnées
 - (D) passe par les points $A(2, -1)$ et $B(4,4)$
- 2) Déterminer l'équation réduite de chacune des droites passant par les deux points donnés
- $E(2; -3)$ et $F(5; -3)$

b) $G(\frac{3}{2}; \frac{4}{5})$ et $H(-2; 1)$

4 Représentation paramétrique d'une droite

- 1) Déterminer une représentation paramétrique des droites d'équations cartésiennes :
- $(D_1) : 3x + 6y - 5 = 0$
 - $(D_2) : -x - 2y + 4 = 0$
- 2) Déterminer une équation cartésienne de la droite de représentation paramétrique :
- $$(D) : \begin{cases} x = -1 + 7t \\ y = 3 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

5 Positions relatives de deux droites

- 1) a) Dans le plan (\mathcal{P}) muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$; on considère les points $A(-2,1)$; $B(3,7)$
- Donner une représentation paramétrique de la droite (AB)
 - Déterminer les points d'intersections de la droite (AB) avec les axes du repère.
- 2) Dans le plan (\mathcal{P}) muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$; on considère (D_1) la droite d'équation cartésienne $3x+6y-5=0$ et (D_2) la droite de représentation paramétrique $(D_2) : \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 3 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
- Étudier la position relative des droites (D_1) et (D_2) .
 - Déterminer, s'il y a lieu, les coordonnées de leur point d'intersection.
- 3) On considère dans le plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) les points : $A(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; $B(-1,3)$; $C(-2,0)$ et $D(-1, -3)$
- Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) et celle de la droite (CD) .
 - Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC)
 - Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD)
 - Étudier la position relative des droites (BC) et (AD) .
 - Soit un triangle EFG tel que :
 $(EF) : x + 2y = 3$ et $(EG) : x + y = 2$ et $(FG) : 2x + 3y = 4$..
 Déterminer les coordonnées des points E et G

Séries d'exercices N°7

Les polynômes

1 Égalité de deux polynômes

- 1) Soit (a, b, c) un triplet de nombres réels
Déterminer le degré du polynôme :

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

- 2) Déterminer le réel a pour que les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ soient égaux dans chacun des cas suivants :

a) $P(x) = (x-2)(x-5)$ et $Q(x) = x^2 + ax + 10$

b) $P(x) = (2x-a)(x+3)$ et $Q(x) = 2x^2 + x - 15$

- 3) Déterminer les réels a, b et c sachant que les polynômes P et Q sont égaux

a) $P(x) = ax^2 + (b-3)x + 2c - 1$ et $Q(x) = x^2 - 5x + 7$

b) $P(x) = (a+3b)x - 2a$ et $Q(x) = -bx + 2b + 1$

c) $P(x) = (2a-b)x^2 + (a-2b+1)x + a + b + c$ et $Q(x) = 0$

2 Opérations sur les polynômes

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère les polynômes suivants :

• $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 5$

• $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 4$

• $R(x) = ax^2 + bx + c$

- 1) a) Calculer et simplifier le polynôme :
 $S_1(x) = 3P(x) - 2Q(x) + xR(x)$

- b) Déterminer le degré du polynôme S_1 en fonction des valeurs de a .

- 2) a) Calculer et simplifier le polynôme :
 $S_2(x) = P(x) \times Q(x) - Q(x) \times R(x)$

- b) Déterminer le degré du polynôme S_2

- 3) Déterminer les réels a, b, c tels que :

$$P(x) \times R(x) = x^6 - 5x^5 + 8x^4 - 11x^3 + 10x^2 - 20x + 20$$

3 Racines division et factorisation

- 1) Soit le polynôme $P(x)$ tel que :

$$P(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

- a) i) Vérifier que -1 est une racine du polynôme $P(x)$.

- ii) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x+1)Q(x)$$

- iii) En déduire que :

$$P(x) = (x^2 + x)(x^2 + 5x + 6)$$

- b) i) Montrer que :

$$x^2 + 5x + 6 = (x^2 - 9) + 5(x + 3)$$

- ii) Factoriser $x^2 + 5x + 6$.

- iii) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$P(x) = 0$$

- 2) Factoriser les polynômes suivants :

• $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

• $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

• $R(x) = 2\sqrt{2}x^3 - 1 + 2x^2 - 1$

- 3) Soit $P(x) = 2x^4 + x^3 - 20x^2 - 13x + 30$.

- a) Vérifier que 1 et $-\frac{5}{2}$ sont racines de P .

- b) Factoriser $P(x)$.

Séries d'exercices N°8

Equations, inéquations et systèmes

1 Equations du premier degré à une inconnue

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{5x}{6} = 5x - 14$
- $2 - \frac{3x-1}{15} + \frac{x-4}{5} = \frac{x+4}{3}$
- $|-3x+1| = 0$
- $|3x-7| = 4$
- $|3x+2| = |-x+4|$
- $(x+2)(2x-1) = 2x^2 + 3$

2 inéquations du premier degré à une inconnue

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

- $2x - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}x$
- $9 < 3 + 2x < 13$
- $\frac{3(x-1)}{2} - 4x < 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)$
- $\left|\frac{1-2x}{2}\right| > 2$
- $\left|\frac{1}{x-4}\right| > 2$
- $\left|\frac{6}{-3x+3}\right| \geq 1$

3 Forme canonique

Déterminer la forme canonique des équations suivantes :

- $P(x) = 2x^2 - 2x - 12$
- $P(x) = -2x^2 + 8x$
- $P(x) = -\sqrt{3}x + x^2 - 1$
- $P(x) = 3x^2 - x + \frac{5}{12}$
- $P(x) = -\frac{1}{5}x^2 - 2x - 5$

4 Equations du second degré à une inconnue

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $-2x^2 + 12x - 16 = 0$
- $3x^2 - 5x + 2 = 0$
- $-4x^2 - 12x + 40 = 0$
- $3x^2 + 6x - 24 = 0$
- $2x^2 + x - 3 = 0$
- $x(x+3) = -3$

7) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = 0$

8) $x^4 - 81 = 0$

9) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

10) $2x^2 + 3|x| + 1 = 0$

11) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$

5 inéquations du second degré à une inconnue

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1) $-6x^2 - x + 2 \leq 0$

2) $\frac{x^2 - 2x}{x - 1} > 0$

3) $(3x - 1)(2x^2 + 3x - 5) > 0$

4) $\frac{x+1}{x} \leq \frac{x+2}{x+3}$

5) $(2x - 3)(-2x^2 + 5x + 3) > 0$

6) $\frac{x}{x-2} \geq -x + 4$

7) $(2x^2 + 5x + 3)(3x^2 + x - 2) \leq 0$

8) $\frac{-x^2 + 4x - 21}{x^2 + \frac{x}{2} + 1} < 0$

6 Systèmes d'équations

1) Trouver deux entiers dont la somme est égale à 40 et le produit à 37

2) Résoudre algébriquement les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 8x + 5y = 36 \\ -3x + 2y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 1 \\ 2x - \sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -5 \end{cases}$ (Changement de variable)

3) Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations suivants (Régionnement) :

a) $(S_1) : \begin{cases} x + y - 3 \geq 0 \\ x - y + 1 < 0 \end{cases}$

b) $(S_2) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ 2x + y \leq 4 \\ x + 2y \leq 5 \end{cases}$

Séries d'exercices N°9

Trigonométrie (Première partie)

1 unités de mesure des angles

Compléter le tableau suivant :

Mesure en degrés	180		360	
Mesure en radians	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$	
Mesure en grades		100		400

2 Cercle trigonométrique - Abscisses curvilignes

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1) Placer sur un cercle trigonométrique de repère orthonormé direct $(O; \vec{O}\hat{I}; \vec{O}\hat{J})$ les points d'abscisses curvilignes :

$$\frac{\pi}{3}; \quad -\frac{\pi}{2}; \quad -\pi; \quad \frac{2\pi}{3}; \quad -\frac{\pi}{3}; \quad \frac{4\pi}{3}; \quad -\frac{2\pi}{3}.$$

2) Déterminer la mesure principale des angles suivants, puis les placer sur le cercle trigonométrique :

$$M_1(0); M_2\left(\frac{\pi}{4}\right); M_3\left(\frac{\pi}{6}\right); M_4\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$M_5\left(-\frac{\pi}{3}\right); M_6\left(-\frac{\pi}{2}\right); M_7(-\pi); M_8\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$M_9(12\pi); M_{10}\left(\frac{7\pi}{2}\right); M_{11}\left(\frac{7\pi}{2}\right); M_{12}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$M_{13}\left(-\frac{7\pi}{6}\right); M_{14}\left(\frac{13\pi}{3}\right); M_{15}\left(-\frac{4\pi}{3}\right); M_{16}(-21\pi)$$

$$M_{17}\left(-\frac{9\pi}{4}\right); M_{18}\left(\frac{23\pi}{6}\right); M_{19}\left(-\frac{17\pi}{3}\right); M_{20}\left(-\frac{121\pi}{2}\right)$$

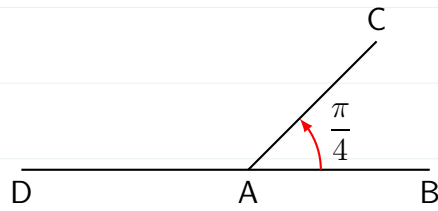
3 Angles orientés

1) ABC est un triangle. Démontrez que :

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{BC}, \vec{BA}) + (\vec{CA}, \vec{CB}) = \pi.$$

2) Déterminer une mesure en radian des angles :

$$(\vec{AB}, \vec{CA}); (\vec{DB}, \vec{DA}) \text{ et } (\vec{AD}, \vec{AC})$$



3) ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct.

a) construire la figure

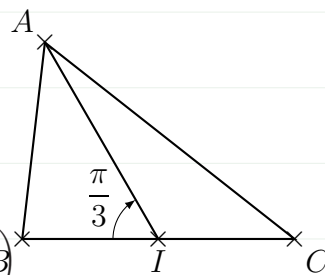
b) Donne la mesure principale en radian de chacun des angles orientés suivants : $(\vec{AB}, \vec{AC}); (\vec{BA}, \vec{BC}); (\vec{CA}, \vec{CB})$ et (\vec{CB}, \vec{CA})

4) ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$. On sait que $(\vec{IA}, \vec{IB}) = \frac{\pi}{3}$. Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

a) $(\vec{AI}, \vec{IB});$

b) $(\vec{AI}, \vec{IC});$

c) $(\vec{IA}, \vec{CB}).$



5) $ABCD$ est un quadrilatère. Démontrez, en utilisant la relation de Chasles, que :

$$(\vec{AB}, \vec{AD}) + (\vec{BC}, \vec{BA}) + (\vec{CD}, \vec{CB}) + (\vec{DA}, \vec{DC}) = 0.$$

6) ABC est un triangle rectangle en A tel que :

$$(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{5}.$$

a) construire la figure

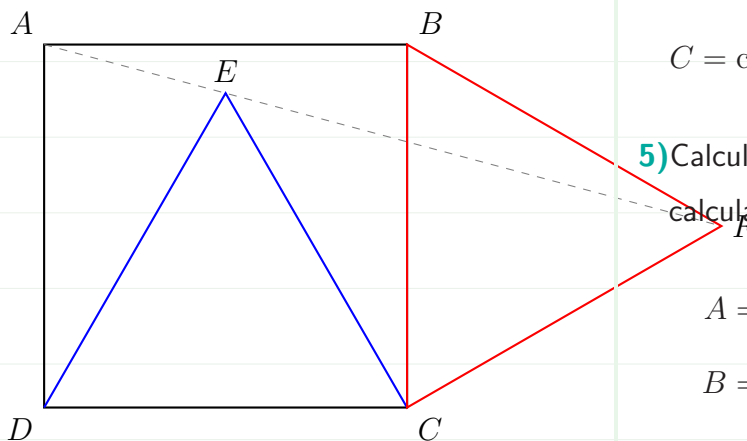
b) Justifiez l'égalité :

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}).$$

c) Calculez la mesure principale de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB})$.

7) $ABCD$ est un carré indirect de côté 6; CED est un triangle équilatéral direct; CBF est un triangle équilatéral indirect.

a) Faire une figure.



b) Déterminer la mesure principale de chacun des angles ci-dessous :

$$(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DC}), (\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DA}), (\overrightarrow{CF}; \overrightarrow{CE}), (\overrightarrow{EB}; \overrightarrow{EA})$$

(aide : quelle est la nature du triangle ADE ?),
 $(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EC})$.

c) Démontrer que E, F et A sont alignés.

4 Relations entre les lignes trigonométriques

1) Calculer les valeurs trigonométriques des nombres suivants :

$$\frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}; -\frac{92\pi}{3}; \frac{71\pi}{3}$$

2)a) Soit $x \in [0; \pi]$ tel que $\cos x = -\frac{1}{4}$. Déterminer $\sin x$.

b) Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\sin x = \frac{3}{5}$. Déterminer $\cos x$.

3) pose $a = \sin \frac{\pi}{10}$. Exprimer en fonction de a :
 $\sin \frac{9\pi}{10}$; $\sin \frac{11\pi}{10}$; $\cos \frac{4\pi}{10}$; $\sin \frac{6\pi}{10}$

4) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin(5\pi - x) - \cos(3\pi - x)$$

$$B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(x + 3\pi) + \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$C = \cos(123\pi + x) + \cos(234\pi - x)$$

5) Calculer les expressions suivantes, sans utiliser la calculatrice :

$$A = \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5}$$

$$B = \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{11\pi}{8} + \sin \frac{13\pi}{8}$$

$$C = \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{9\pi}{10}$$

$$A_1 = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$A_2 = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$A_3 = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{6\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{9\pi}{10}\right)$$

6) Sachant que : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

a) Calculer : $\tan\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

b) Calculer : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

c) Calculer : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

Séries d'exercices N°11

Trigonométrie (Deuxième partie)

1 Équations trigonométriques

Résoudre sur l'intervalle I les équations suivantes :

1) $2 \cos 5x + \sqrt{3} = 0 ; \quad I = \mathbb{R}$

2) $2 \sin 4x + 1 = 0 ; \quad I = \mathbb{R}$

3) $\sin^2(x) = \frac{3}{4} ; \quad I = \mathbb{R}$

4) $\sin(3x) = \sin(2x) ; \quad I = \mathbb{R}$

5) $\sin(3x) = \cos(2x) ; \quad I = \mathbb{R}$

6) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 ; \quad I = \mathbb{R}$

7) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0 ; \quad I = [0; \pi]$

8) $2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0 ; \quad I = [0; 2\pi]$

9) $\sin(2x) = \frac{1}{2} ; \quad I =]-\pi; \pi[$

10) $\tan(5x) = 1 ; \quad I = [0; \pi]$

11) $\sqrt{3} \tan x = -3 ; \quad I = \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[$

12) $\cos(2x) = -\cos \frac{\pi}{8} ; \quad I = [0; 2\pi[$

2 Inéquations trigonométriques

1) Résoudre sur l'intervalle I les inéquations suivantes :

a) $2 \cos x > 1 ; \quad I =]-\pi; \pi]$

b) $2 \cos x - \sqrt{2} \leq 0 ; \quad I =]0; 2\pi]$

c) $\tan x < -\sqrt{3} ; \quad I =]-\pi; \pi]$

d) $(2 \sin x - 1)(2 \cos x + \sqrt{3}) > 0 ; \quad I =]0; 2\pi]$

e) $\frac{1}{4} \leq \sin^2 x \leq \frac{1}{2} ; \quad I =]0; \pi]$

2) On pose $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$

a) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-\pi, \pi]$

3 Angles inscrits, les quadrilatères inscrits

1) Montrer que si D est un point du cercle (\mathcal{C}) de diamètre $[AB]$, alors le triangle ADB est rectangle en D

2) Soit (\mathcal{C}) un cercle de diamètre 1. A, B, C et D quatre points du cercle (\mathcal{C}) tels que A et B soient diamétralement opposés.

a) Montrer que : $AC = \cos \hat{A}$ et $BD = \cos \hat{B}$

b) Montrer que : $BC = \sin \hat{A}$ et $AD = \sin \hat{B}$

c) Montrer que : $D\hat{A}C = \hat{A} - \hat{B} + \frac{\pi}{2}$.

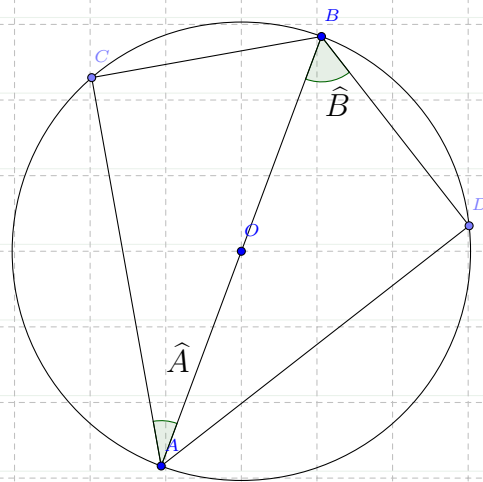
d) En déduire que : $\sin D\hat{A}C = \cos(\hat{A} - \hat{B})$

e) Montrer que : $CD = \cos(\hat{A} - \hat{B})$

f) On admet que $AB \times DC = BC \times AD + BD \times AC$

Montrer que :

$$\cos(\hat{A} - \hat{B}) = \cos \hat{A} \times \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \times \sin \hat{B}$$



Séries d'exercices N°12

Les fonctions numériques

1 Ensemble de définition ★★☆☆☆

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 16}$

2) $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$

3) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

4) $f(x) = \sqrt{2x}$

5) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$

6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

7) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$

8) $f(x) = \sqrt{6 + 3x}$

9) $f(x) = \frac{3}{(x-5)^2}$

10) $f(x) = \frac{1-x^2}{x^3+8}$

11) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{2-x^2}}$

12) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

13) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

14) $f(x) = \frac{1}{3x-x^2}$

15) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

16) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$

2 Parité ★★★★★

Etudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

2) $f(x) = 2x - \frac{3}{x}$

3) $f(x) = \frac{|x|+1}{|x|+2}$

4) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

5) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

6) $f(x) = x^2 + |3x+1|$

7) $\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

8) $f(x) = \tan(x)$

3 Monotonie ★★★★★

1) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) = -5x + 3$ est décroissante sur \mathbb{R}

2)a)i) Montrer que la fonction

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 2x - 3$$

est croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$

ii) Montrer que la fonction

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 2x - 3$$

est décroissante sur l'intervalle $] -\infty; 1]$

3)a) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ est strictement décroissante sur $]3; +\infty[$ et sur $] -\infty; 3[$

b) La fonction $x \mapsto f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ est-elle strictement décroissante sur $] -\infty; 3[\cup]3; +\infty[$? (justifier votre réponse)

4 Fonction affine par morceaux ★★★★★

On considère la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |x+3| - |x-4|$$

1) Écrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue

2) En déduire le tableau de variations de f

3) Tracer la courbe représentative de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

5 Fonction du second degré ★★★★★

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - x - 2$ On note (C_f) sa

courbe représentative dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

2) a) Étudier les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de f , puis déterminer les extrémums de f .

3) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.

4) Tracer la courbe (C_f) .

5) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation de l'équation $f(x) = m$

6) Déterminer graphiquement le signe de la fonction f suivant les valeurs de x

7) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = x^2 - |x| - 2.$$

a) Montrer que g est une fonction paire.

b) Tracer la courbe (C_g) dans le même repère que (C_f) avec une autre couleur.

6 Fonction homographique ★★★★★

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{-5x}{2x - 4}.$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f .

b) Montrer que pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) = -\frac{5}{2} - \frac{5}{x - 2}.$$

2) a) Quelle est la nature de la courbe (C_f) ?

Préciser ses éléments caractéristiques.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.

d) Tracer la courbe (C_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

e) Déterminer le signe de $f(x)$ sur D_f .

3) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = |f(x)|.$$

a) Déduire la construction de la courbe (C_g) à partir de (C_f) dans le même repère.

b) On considère les deux nombres :

$$\bullet A = \frac{-5\sqrt{2026}}{2\sqrt{2026} - 4}$$

$$\bullet B = -\frac{5}{2} - \frac{5}{\sqrt{2025} - 2}$$

Comparer A et B

Séries d'exercices N°13

Transformations dans le plan

1 Translation, symétrie axiale, symétrie centrale



1) Soient A , B et C trois points du plan P , et M un point qui vérifie la relation :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

a) Vérifier que $T_{\overrightarrow{BC}}(A) = M$.

b) Construire B' l'image de B par $T_{\overrightarrow{AC}}$.

c) Montrer que C est le milieu de $[B'M]$.

2) $ABCD$ étant un trapèze tel que $DC = 2AB$ et I milieu de $[DC]$ et E tel que $ACED$ un parallélogramme et t la translation de vecteur \overrightarrow{AD} .

a) Déterminer les images des points A et C par t .

b) Montrer que $t(B) = I$.

c) En déduire que $(IE) \parallel (BC)$.

3) Soit un triangle ABC et E un point du segment $[BC]$ distinct de B et C .

a) Construire les points $t_{\overrightarrow{BA}}(E) = F$ et $t_{\overrightarrow{BC}}(E) = G$.

b) Montrer que $t_{\overrightarrow{AC}}(F) = G$ et que $t_{\overrightarrow{BE}}((AC)) = (FG)$.

c) Les droites (AC) et (EF) se coupent en un point K . La parallèle à la droite (BC) passant par K coupe (AB) en M et (FG) en N . Montrer que K est le milieu du segment $[MN]$.

4) $ABCD$ est un parallélogramme de centre O . (Δ) une droite passant par O et coupe (AD) en M et (BC) en N . Notons S_O la symétrie de centre O .

a) Quelle est l'image de (Δ) par S_O ? Quelle est l'image de (AD) par S_O ?

b) Démontrer que O est le milieu de $[MN]$.

c) Déterminer l'image du cercle (C) du centre A et qui passe par O .

2 Homothétie



1) Soient A et B deux points du plan et T la transformation qui associe chaque point M du plan à un point M' tel que :

$$3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MM'} = \vec{0}$$

a) Déterminer I le point invariant par la transformation T .

b) Déterminer IM' en fonction de IM .

c) Déterminer la nature de la transformation T .

2) On considère dans le plan un triangle ABC .

Soient E le point défini par : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, F le projeté de E sur (AC) parallèlement à (BC) et I l'intersection des droites (EC) et (BF) .

a) Construire une figure.

b) Montrer que $\frac{BC}{EF} = \frac{4}{3}$.

c) Soit h l'homothétie de centre I et qui transforme E en C .

i) Montrer que $h(F) = B$.

ii) En déduire le rapport de h .

3) On considère deux points distincts A et B du plan. Soit T la transformation qui associe à tout point M du plan, le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$$

a) Déterminer le point I invariant par cette transformation T .

b) Déterminer la nature de la transformation T .

4) $ABCD$ étant un parallélogramme et F tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

La droite parallèle à (AD) passant par F coupe respectivement les droites (AB) et (DC) en I et H . La droite parallèle à (AB) passant par F coupe respectivement les droites (AD) et (BC) en G et E .

a) Construire une figure convenable et montrer que $\overrightarrow{FC} = -2\overrightarrow{FA}$.

b) Soit h l'homothétie de centre F et qui transforme A en C .

i) Montrer que le rapport de h est -2 .

ii) Montrer que l'image par h de la droite (AD) est (BC) .

i) Montrer que $\overrightarrow{FH} = -2\overrightarrow{FI}$.

ii) En déduire que $h(I) = H$.

c) Déterminer $h(G)$ et en déduire que $\overrightarrow{HE} = -2\overrightarrow{HG}$ et montrer $(HE) \parallel (IG)$.

5) Soit un triangle ABC , les points M et N sont définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; I et J sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[MN]$.

a) Construire une figure.

b) En considérant l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$, démontrer que les points A , I et J sont alignés.



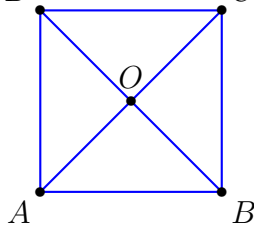
Séries d'exercices N°14

Produit scalaire dans le plan et ses applications

1 Définition et propriétés - Vecteurs orthogonaux

1) Soit ABC un triangle isocèle en C tel que $AB = 6$. Calculer le produit scalaire : $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

On considère le carré $ABCD$ de centre O et de côté 8. Calculer les produits scalaires suivants :



- 2) a) $\vec{AB} \cdot \vec{AO}$ b)
 $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ c)
 $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ d)
 $\vec{BO} \cdot \vec{OD}$ e)
 $\vec{OB} \cdot \vec{DO}$

3) Pour chacune des figures suivantes, calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$:

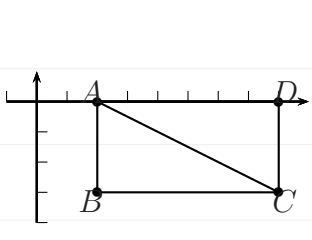
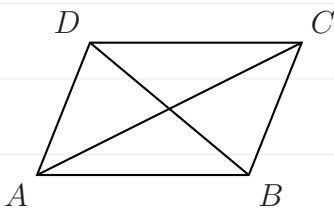


Figure 1



Figure 2

4) $ABCD$ est un parallélogramme. Montrer que : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$.



2 Expression trigonométrique du produit scalaire

1) Calculer le produit scalaire de \vec{u} par \vec{v} dans chacun des cas suivants :

- a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ radians.
 b) $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{3}$ radians.

c) $\|\vec{u}\| = 8$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ et $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{3\pi}{4}$ radians.

d) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{3\pi}{4}$ radians.

2) Soit ABC un triangle équilatéral de côté 5 et H le milieu de $[BC]$. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AH}$

3 Théorème de la médiane

1) On considère le triangle ABC tels que $AB = 8\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$ et $BC = 5\text{cm}$. A' , B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Calculer les distances AA' , BB' et CC'

2) A et B sont deux points distincts du plan tel que $AB = 4\text{cm}$ et I milieu de $[AB]$.

a) Montrer que pour tout point M du plan, on a les relations :

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$
- $MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI} \cdot \vec{BA}$
- $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

b) Déterminer :

- L'ensemble E_1 des point M du plan tels que tel que $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$
- L'ensemble E_2 des point M du plan tels que tel que $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 3$
- L'ensemble E_3 des point M du plan tel que tel que $MA^2 + MB^2 = 20$ item L'ensemble E_4 des point M du plan tel que tel que $MA^2 + MB^2 = 7$

c) Soit H le pied de la hauteur du triangle ABM issue de M

i) Vérifier que $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB}$

- ii) En déduire l'ensemble E_4 des points M du plan tels que tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 3$

4 Théorème d'Al Kashi

- 1) Soit ABC un triangle tel que :
 $AB = 2$; $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$

a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$

b) En utilisant le théorème d'Al Kashi,

i) Montrer que $BC = 2\sqrt{7}$

ii) Calculer $\cos \widehat{BCA}$

- c) Soit E et F deux points du plan tels que : B est le milieu de $[AE]$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{12}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$

i) Montrer que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

ii) Montrer que $(CE) \perp (AF)$

- 2) Le triangle MNP est tel que : $MN = 8$ cm ,
 $MP = 5$ cm et $\hat{M} = \frac{5\pi}{6}$ Calculer NP .

- 3) Le triangle ABC est tel que : $AC = 6$ cm,
 $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$ et $\hat{C} = 2\frac{\pi}{3}$ Calculer BC .

- 4) Le triangle IGN est tel que : $IG = 2$ cm ,
 $IN = \sqrt{10}$ et $GN = \sqrt{2}$. Calculer la mesure de l'angle \hat{G}

- 5) ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $BC = 8$ et $CA = 7$ Le point I est le milieu du segment $[BC]$ et G est le centre de gravité du triangle ABC .

a) Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$ en utilisant la relation de Chasles et la formule d'Al-Kashi.

b) En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$

5 Relations métriques dans le triangle rectangle

- 1) Soit ABC un triangle, tel que : $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 7$

a) Montrer que : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{5}$

b) i) calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

ii) en déduire que : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 30$

- c) Soit H le projeté orthogonal du point A sur $[BC]$. Calculer la distance BH .

- 2) Soit ABC un triangle, tel que :
 $AB = \sqrt{7}$, $AC = 5$ et $BC = 2$

a) montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 14$

b) montrer que : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{2\sqrt{7}}{5}$

- c) soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) . Calculer la distance AH .

- d) soit I le milieu du segment $[BC]$. Calculer la distance AI .

e) On considère le point M tel que :
 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{12}{25}\overrightarrow{AC}$

i) Calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$

- ii) Montrer que les droites (MB) et (AC) sont orthogonales.

- 3) Montrer que « ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $\sin^2 \hat{A} = \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}$.

- 4) ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que $\cos A = \frac{3}{4}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$. Soit I le milieu de $[AB]$ et F tel que $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{BC}$.

a) Montrer que $AB = 2\sqrt{2}$ et $BC = 2$.

b) Calculer \overrightarrow{IF} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

- c) Montrer que le triangle AIF est rectangle en I .

d) Montrer que $IF = \sqrt{14}$.

- e) En utilisant le théorème de la médiane montrer que $BF = 4$.

- 5) Soit ABC un triangle, et H le pied de la hauteur issue de A .

a) Rappeler l'expression de l'aire du triangle ABC en fonction de AH et BC .

b) Rappeler l'expression de l'aire du triangle ABC en fonction de AB , AC et de l'angle \widehat{BAC} .

c) En déduire que : $AH \times BC = AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC})$

- d) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\sin(\widehat{BAC}) = 1$.

- e) Conclure que :

$$ABC \text{ rectangle en } A \iff AH \times BC = AB \times AC$$

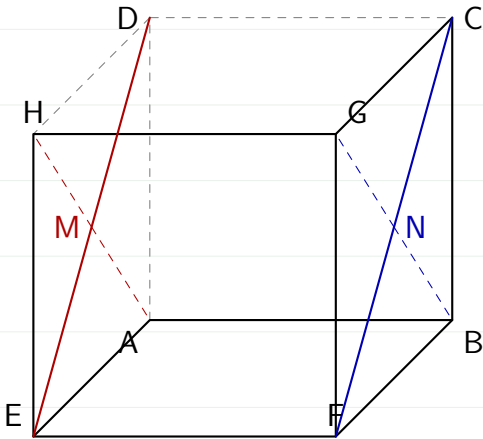
- f) Interpréter géométriquement l'égalité $AH \times BC = AB \times AC$.

Séries d'exercices N°15

La géométrie dans l'espace

1 Positions relatives

On considère un cube $ABCDEFGH$. le point M est le centre du carré $ADHE$, et le point N est le centre du carré $BCGF$.



1) Dans chacun des cas suivants, donner la position relative des deux droites citées :

- (AB) et (EH)
- (AH) et (DG)
- (AN) et (EN)
- (AB) et (GF)
- (AB) et (GF)
- (BH) et (NA)
- (AB) et (CG)
- (AF) et (GH)
- (AC) et (FH)
- (CE) et (DF)
- (BH) et (AE)

2) Dans chacun des cas suivants, donner la position relative de la droite et du plan cités :

- (AB) et (CDH)
- (AC) et (BDF)
- (BG) et (CDE)
- (AG) et (CFH)
- (BC) et (FAD)
- (AB) et (ACD)

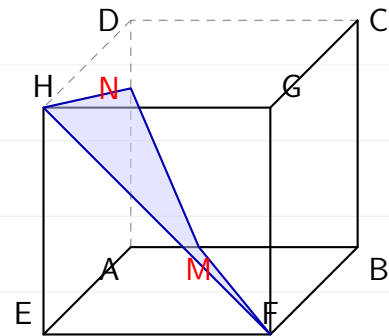
3) Dans chacun des cas suivants, donner la position relative des deux plans cités :

- (ABC) et (EGH)
- (ABG) et (CDE)
- (CAF) et (DGH)
- (FHC) et (BDE)
- (FAH) et (BCG)

2 Parallélisme

1) Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, le point M appartient à l'arête $[AB]$ et le point N est l'intersection de la droite (AD) avec le plan (FHM) .

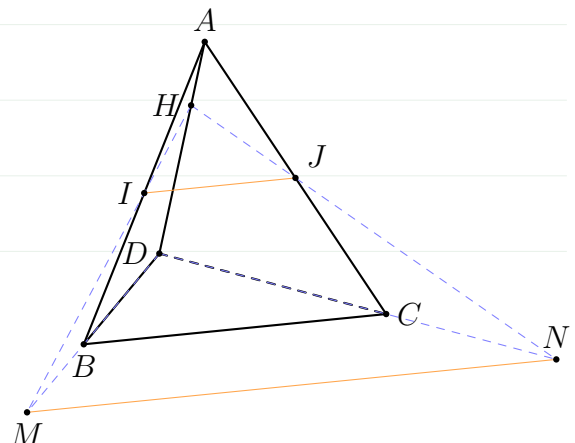
Démontrer que $(FH) \parallel (MN)$.



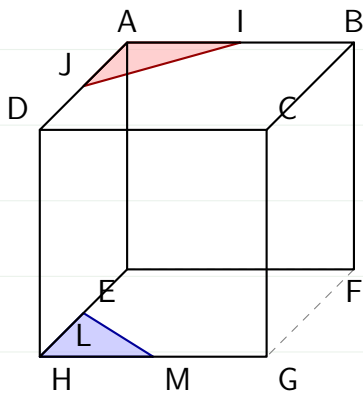
2) Sur le tétraèdre $ABCD$ ci-dessous, I est le milieu de $[AB]$; J est le milieu de $[AC]$ et H est un point du segment $[AD]$ distinct de son milieu :

- les droites (HI) et (DB) se coupent en M ;
- les droites (HJ) et (DC) se coupent en N .

Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD)

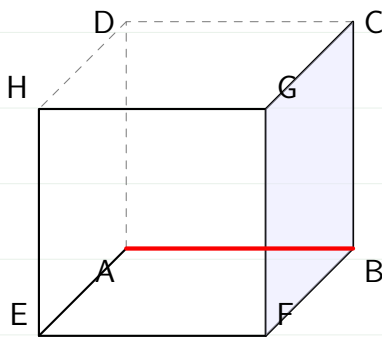


- 3) Sur le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, les points I , J et M appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[AD]$ et $[GH]$.
Montrer que les plans AIJ et HLM sont parallèles.



3 Orthogonalité

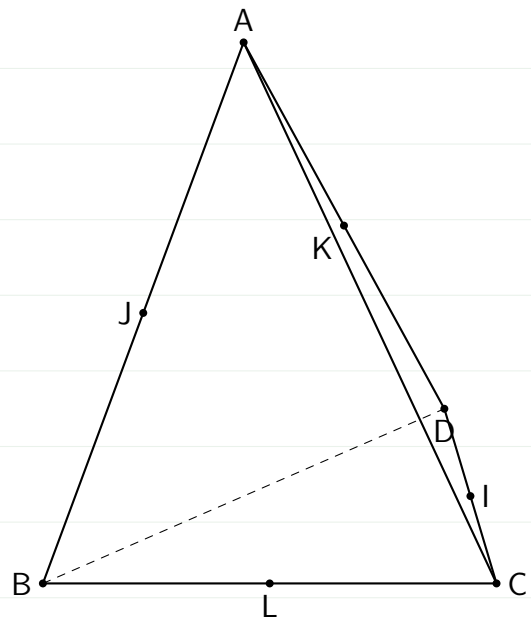
- 1) Soit $ABCDEFGH$ un cube.



- a) i) Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (BCG) .
ii) En déduire que les droites (AB) et (CF) sont orthogonales.
- b) i) Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (HCG) .
ii) Déduire que la droite (AD) est orthogonale à la droite (HC) .
- c) Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (ABC) .
- d) Démontrer que la droite (AH) est orthogonale au plan (EDC) .
- e) Les droites (EG) et (AC) sont-elles orthogonales? Justifier.

- 2) On considère dans l'espace le tétraèdre $ABCD$ ci-dessous tel que : $(AB) \perp (BC)$ et $(AB) \perp (BD)$. I , J , K et L sont respectivement les milieux des segments $[CD]$, $[AB]$, $[AD]$ et $[BC]$.

- a) Montrer que $(AB) \perp (CD)$.
b) Montrer que (IJK) et (BCD) se coupent selon une droite que l'on déterminera.
c) Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$?
d) On suppose que $AC = AD$ et $BC = BD$:
i) Montrer que (AIB) est le plan médiateur de $[CD]$.
ii) En déduire que $(IJ) \perp (CD)$.
iii) Montrer que $(AIB) \perp (ACD)$.



📖 Définition 0.1 : Plan médiateur.

Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est le plan orthogonal à la droite (AB) qui passe par le milieu de $[AB]$.

(C'est l'ensemble des points de l'espace qui sont équidistants des extrémités du segment $[AB]$)