

# 2<sup>ème</sup> BAC

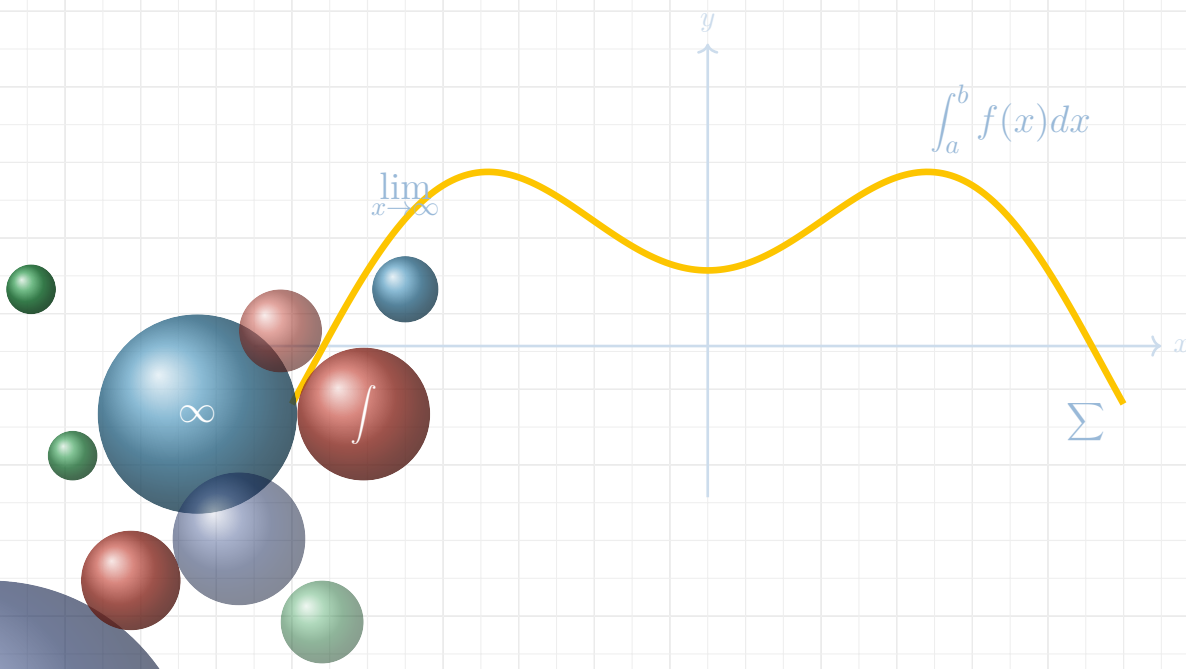
## SCIENCES EXPÉRIMENTALES



RECUEIL COMPLET

# Fascicule d'Exercices

## de Mathématiques



# SÉRIES D'EXERCICES N°1

## CONTINUITÉ - DÉRIVATION

### 1 Continuité en un point

1) Étudier la continuité de  $f$  en  $x_0$  dans chacun des cas ci-dessous :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & ; x > 1 \\ x^2 & ; x \leq 1 \end{cases} ; x_0 = 2$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ 12 & ; x = 2 \end{cases} ; x_0 = 2$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2 - |x + 1| & ; x \leq 0 \\ -2 + |x + 1| & ; x > 0 \end{cases} \text{ et } x_0 = 0 ; x_0 = -1$$

$$\text{d) } \begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} & ; x \neq 0 \\ f(x) = 0 & ; x = 0 \end{cases} ; x_0 = 0$$

2) Déterminer la valeur de  $k$  pour que  $f$  soit continue en  $x_0$

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 - 12}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ k & ; x = 2 \end{cases} ; x_0 = 2$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} & ; x \geq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ k & ; x = 1 \end{cases} ; x_0 = 1$$

### 2 Continuité sur un intervalle

Étudier la continuité de  $f$  sur l'intervalle  $I$  dans chacun des cas ci-dessous :

$$\text{1) } f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 2 \\ 4 & ; x \geq 2 \end{cases} \text{ et } I = [0; 4]$$

$$\text{2) } f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 1 \\ |x - 2| & ; x \geq 1 \end{cases} \text{ et } I = \mathbb{R}$$

$$\text{3) } f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 0 \\ 2x - 1 & ; x \geq 0 \end{cases} \text{ et } I = ]-2; 3[$$

### 3 Image d'un intervalle par une fonction continue

Déterminer l'image de l'intervalle  $I$  par la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants

$$\text{1) } f(x) = x^2 \text{ et } I = [-3; 2]$$

$$\text{2) } f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ et } I = [0; 1[$$

$$\text{3) } f(x) = -x^3 - 4x + 5 \text{ et } I = ]-\infty; 1]$$

### 4 Théorème des valeurs intermédiaires

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + x + 1$

a) Étudier les variations de  $f$ , et dresser son tableau de variation

b) Montrer l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $] -1; 0[$

c) Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-1}$

d) Déterminer  $f(]-\infty; -1])$  et  $f([0; +\infty[)$

e) Prouver que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$

f) Dresser le tableau de signe de  $f$

g) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 6x^5 + 10x^3 + 15x^2 - 30$

i) Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ; puis étudier son signe en fonction de  $\alpha$

ii) Dresser le tableau de signe de  $g$

2) Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  par :  $x^3 - 3x - 1$

a) Calculer  $f(-1)$ ;  $f(1)$ ;  $f(-2)$  et  $f(2)$

b) Étudier les variations de  $f$ , et dresser son tableau de variation

c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$

### 5 Fonction réciproque

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 - 2x - 5$

1) Étudier les variations de  $f$

2) Dresser le tableau de variation  $f$

3) Montrer que la fonction  $g$  restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = ]-\infty; 1]$  admet une fonction réciproque définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera

4) Déterminer la fonction réciproque  $g^{-1}$

5) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de  $g$  et de  $g^{-1}$

### 6 Dérivabilité de la composée de deux fonctions dérivable

Soit  $F$  la fonction définie par  $F(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

- 1) Déterminer  $\mathcal{D}_F$  l'ensemble de définition de  $F$
- 2) Calculer  $F'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$
- 3) Déterminer deux fonctions  $f$  et  $g$  tel que  $F = g \circ f$
- 4) Comparer  $F'(x)$  et  $g'(f(x)) \times f'(x)$

**7 Dérivée de la fonction réciproque**

- 1) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 - 3x - 3$ 
  - a) Étudier les variations de  $f$ , et dresser son tableau de variation
  - b) Montrer que la fonction  $g$  restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = [1; +\infty[$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera
  - c) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[1; +\infty[$ .
  - d) Vérifier que  $g^{-1}$  : la fonction réciproque de  $g$  est dérivable en 0 et que  $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$
- 2) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$ 
  - a) Étudier les variations de  $f$ , et dresser son tableau de variation
  - b) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera
  - c) En déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - d) On donne  $\alpha = -1$ . Déterminer le tableau de signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
  - e) Vérifier que  $f^{-1}$  : la fonction réciproque de  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$
  - f) Calculer  $(f^{-1})'(0)$

**8 Fonction racine nième ( $n \geq 2$ )**

- 1) Comparer  $\sqrt[3]{3}$  et  $\sqrt{2}$
- 2) Écrire sous la forme  $\sqrt[n]{a}$  avec  $a > 0$  chacun des nombres suivants :
  - a)  $a = 4$
  - b)  $b = \sqrt{\sqrt[3]{4}}$
  - c)  $c = 2 \times \sqrt[3]{3}$
  - d)  $d = \sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{16}$
- 3) Résoudre les équations suivantes
  - a)  $x^6 = 7$

- b)  $x^3 = -27$
- c)  $x^3 = 5$
- d)  $x^4 = -16$
- e) i)  $x^2 - 5x + 6 = 0$   
ii)  $\sqrt[3]{|x|^2} - 5\sqrt[3]{|x|} + 6 = 0$

**4) Simplifier les expressions suivantes**

- a)  $a = \frac{27^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{27}}$
- b)  $b = \frac{64^{\frac{2}{3}}}{216^{\frac{-1}{3}}}$
- c)  $c = \frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt{5} \times \sqrt[3]{4}}$

5) Calculer la limite :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$   
(Poser  $t = \sqrt[6]{x}$ )

6) Calculer la limite :  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{x - 64}$

7) Calculer la limite :  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^2 - x - 56}$

8) Calculer la limite :  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{7 + \sqrt[3]{x}} - 3}{x - 8}$

9) Calculer la limite :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

10) Calculer la limite :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt[3]{x} - \sqrt{x+3}}{x - 1}$

11) Calculer la limite :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{-8x^3 + x + 3}}{x + 1}$

12) On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sqrt[3]{1+x} - 2x$

- a) Montrer que la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $[-1; 1]$
- b) Montrer qu'il existe un nombre réel  $\alpha$  dans l'intervalle  $] -1; 1[$  tel que :

$$\sqrt[3]{1+\alpha} - 2\alpha = 0$$

- c) Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0.25
- d) Montrer que :  $8\alpha^3 = 1 + \alpha$

**9 Puissances rationnelles**

Simplifier :

- 1)  $x = 8^{\frac{2}{3}}$
- 2)  $y = \left(\frac{25}{49}\right)^{-\frac{3}{2}}$
- 3)  $z = 5^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[6]{25}$
- 4)  $t = 5^{-\frac{2}{3}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$
- 5)  $\frac{2^{\frac{5}{3}} \times \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2^2}}\right)^3 \times 3^{\frac{5}{2}}}{(2^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{3}} \times \sqrt{3^{-\frac{3}{4}}}}$



# SÉRIES D'EXERCICES N°2

## EXEMPLES D'ÉTUDES DE FONCTIONS

### 1 Exemple 01

On considère la fonction  $f$  définie par :  
 $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$  et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Déterminer  $\mathcal{D}_f$  l'ensemble de définition de  $f$
- 2) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  et interpréter géométriquement le résultat
- 3) Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0 et à gauche en  $-2$  puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.
- 4) a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$   
 b) Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et strictement décroissante sur  $] -\infty; -2]$   
 c) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$
- 5) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = 2x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $(\mathcal{C})$  au voisinage de  $+\infty$
- 6) Tracer la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 7) Montrer que la fonction  $g$  restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = [0; +\infty[$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera
- 8) Montrer que  $\forall x \in J; g^{-1}(x) = \frac{x^2}{2(x+1)}$
- 9) Construire la courbe représentative de  $g^{-1}$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

### 2 Exemple 02

On considère la fonction  $f$  définie par :  
 $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$  et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Déterminer  $\mathcal{D}_f$  l'ensemble de définition de  $f$
- 2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis déterminer la branche infinie de  $(\mathcal{C})$  au voisinage de  $+\infty$
- 3) Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $-3$

puis interpréter géométriquement le résultats obtenu.

- 4) Étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche et à droite en 0 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.
- 5) a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]-3, 0[ \cup ]0, +\infty[$   
 b) Interpréter géométriquement le résultat  $f'(-2) = 0$   
 c) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$
- 6) Montrer que la fonction  $g$  restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = [0; +\infty[$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera
- 7) Tracer la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 8) Construire la courbe représentative de  $g^{-1}$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 9) À partir de la courbe représentative de  $g^{-1}$ , déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x}$

### 3 Exemple 03

On considère la fonction  $f$  définie par :  
 $f(x) = |x - 1| + \frac{1}{x + 1}$

- 1) Déterminer  $\mathcal{D}_f$  l'ensemble de définition de  $f$
- 2) Calculer les limites aux bornes de  $\mathcal{D}_f$ .
- 3) Étudier les branches infinies de la courbe représentative de  $f$  et préciser sa position relative par rapport à ses asymptotes obliques
- 4) Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathcal{D}_f$
- 5) Étudier la dérivabilité de  $f$  en 1 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.
- 6) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]1, +\infty[$
- 7) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]-\infty, 1[ - \{-1\}$
- 8) Dresser le tableau de variation de  $f$
- 9) Tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé
- 10) Discuter suivant les valeurs du réel  $m$ , le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$ .

# ✎ SÉRIES D'EXERCICES N°3

## LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

### 1 Limites des suites numériques de référence

Calculer les limites suivantes :

- 1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{1 - n^3}$
- 2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5^n - 4^n)$
- 3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
- 4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 3n + 1}{\sqrt{1 + n^4}}$
- 5)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$
- 6)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$
- 7)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 - n}$
- 8)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - \sqrt[3]{n^3 - n}$
- 9)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$
- 10)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1}{2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n}$

### 2 Limites et ordre

1) Calculer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \sin(\frac{n\pi}{2})}{2n + 1}$
- b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \cos(n))$
- c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n + \cos(n) - 1)$
- d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^n + n^2)$

2) On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{9}{u_n}) \end{cases}$$

- a) Montrer que  $(u_n)$  est minorée par 3
- b) Etudier la monotonie de  $(u_n)$
- c) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 3 \leq \frac{1}{2^n}$$

d) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$

3) On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 + u_n) \end{cases}$$

- a) Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- b) Montrer que  $(u_n)$  est croissante puis en déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$
- c) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \geq u_n$
- d) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 2u_n$  et que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2^n$
- e) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$

### 3 Suite de type $v_n = f(u_n)$

Calculer les limites suivantes :

- 1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2 + 1}{8n^2 + 3}}$
- 2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{n\pi + 3}{3n + 1}\right)$

### 4 Suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$

1) On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Méthode 1.

i) On pose  $v_n = u_n + 1$

ii) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$  à déterminer

iii) Ecrire  $v_n$  en fonction de  $n$

iv) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  puis calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

b) Méthode 2.

i) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq -1$

ii) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante

iii) En déduire que la suite  $(u_n)$  vers un réel  $l$  que l'on déterminera

2) On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

a) Méthode 1.

i) On pose  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

ii) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$  à déterminer

iii) Ecrire  $v_n$  en fonction de  $n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$

iv) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

b) Méthode 2.

i) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$

ii) Vérifier que  $u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n + 2}$

iii) En déduire que la suite  $(u_n)$  est croissante

iv) En déduire que la suite  $(u_n)$  vers un réel  $l$  que l'on déterminera

3) On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$\begin{cases} u_0 = 24 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \end{cases}$$

a) i) Calculer  $u_1$  ;  $u_2$  et  $u_3$

- ii) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 4$
- iii) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante
- iv) En déduire que la suite  $(u_n)$  vers un réel  $l$  que l'on déterminera

b)i) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 4 = \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4}$$

ii) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{8}(u_n - 4)$$

iii) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - 4 \leq \frac{1}{8^n}$$

iv) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$

**5 Exo 1 (Session normale 2024)**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 4$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{1 + u_n}$$

1)a) Vérifier que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1 + u_n}$

b) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq 4$$

2)a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$$

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et en déduire que  $(u_n)$  est convergente.

3) Soit  $(v_n)$  la suite numérique définie par :

$$v_n = \frac{2 - u_n}{1 - u_n} \text{ pour tout entier naturel } n$$

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$

b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \frac{1}{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}$

c) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$

**6 Exo 1 (Session rattrapage 2022)**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

1)a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}, u_n > 1$

b) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}(u_n - 1)$  et en déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante et convergente

2) On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}, v_n = u_n - 1$

- 1) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme
- 2) Ecrire  $u_n$  en fonction de  $n$  puis déduire la limite de la suite  $(u_n)$
- 3) Calculer la somme

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2021}$$

**7 Exo 1 (Session normale 2020)**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5} \end{cases}$$

1) Calculer  $u_1$

2) Montrer par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}, u_n > 0$

3)a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}, 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ , puis en déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{3}{2}(\frac{2}{5})^n$

b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4) On considère la suite numérique  $(v_n)$  définie par  $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{5}$

b) Déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$  et en déduire  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

**8 Exo 1 Session normale 2016**

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n} \end{cases}$$

1) Vérifier que  $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$  pour tout entier naturel  $n$  puis montrer par récurrence que  $u_n < 3$  pour tout entier naturel  $n$ .

2) Soit  $(v_n)$  la suite numérique définie par :  $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$  pour tout entier naturel  $n$

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  puis en déduire que  $v_n = (\frac{1}{2})^n$  pour tout entier naturel  $n$

b) Montrer que  $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$  pour tout entier naturel  $n$  puis écrire  $u_n$  en fonction de  $n$

c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

# SÉRIES D'EXERCICES N°4

## FONCTIONS PRIMITIVES

### 1 Fonctions primitives

1) Dans chaque cas, dire si la fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $I$

a)  $f(x) = x - 1$ ;  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$  et  $I = \mathbb{R}$

b)  $f(x) = x - 1$ ;  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$  et  $I = \mathbb{R}$

c)  $F(x) = x + \frac{1}{x}$ ;  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$  et  $I = \mathbb{R}$

2) Dans chaque cas, déterminer la primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$ , vérifiant la condition indiquée.

a)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$  avec  $F(1) = 3$  et  $I = \mathbb{R}$

b)  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2}$  avec  $F(-1) = \pi$  et  $I = ]0; +\infty[$

c)  $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$  avec  $F(2) = 0$  et  $I = ]1; +\infty[$

d)  $f(x) = \sin(2x)$  avec  $F(\frac{\pi}{2}) = 1$  et  $I = \mathbb{R}$

3) Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = ]-1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{(x + 1)^2}$

a) Vérifier que :  $\forall x \in I$  ;  $f(x) = 1 + \frac{4}{(x + 1)^2}$

b) Soit  $h$  la fonction définie sur  $I$  par :  $h(x) = \frac{1}{x + 1}$

i) Calculer  $h'(x)$  puis vérifier que :

$$\forall x \in I ; f(x) = 1 - 4 \times h'(x)$$

ii) En déduire toutes les primitives de  $f$  sur  $I$

4) Déterminer la fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les deux conditions suivantes :

a)  $F$  trois fois dérivable sur  $\mathbb{R}$

b)  $F^{(3)}(x) = 24x$ ;  $F''(0) = 2$ ;  $F'(0) = 1$  et  $F(0) = 0$

### 2 Opérations sur les primitives

Dans chaque cas, déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  considéré

1)  $f(x) = (x + 1)(x + 5)$  et  $I = \mathbb{R}$

2)  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$  et  $I = ]0; +\infty[$

3)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x + 1}} + \pi$  et  $I = ]-\frac{1}{3}; +\infty[$

4)  $f(x) = \sin(5x + \frac{\pi}{3})$  et  $I = \mathbb{R}$

5)  $f(x) = \frac{3x + 3}{(x^2 + 2x + 3)^3}$  et  $I = \mathbb{R}$

6)  $f(x) = x(x^2 - 4)^{2025}$  et  $I = \mathbb{R}$

7)  $f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$  et  $I = ]-1; +\infty[$

8)  $f(x) = \sqrt{2x - 1}$  et  $I = ]\frac{1}{2}; +\infty[$

9)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$  et  $I = ]\frac{1}{2}; +\infty[$

10)  $f(x) = x\sqrt{x}$  et  $I = ]0; +\infty[$

### 3 Primitives d'une fonction impaire, continue

Soit  $f$  une fonction impaire, continue sur  $\mathbb{R}$ ;  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R}$  ,  $G(x) = F(x) - F(-x)$

1) Montrer que  $G$  est une fonction constante sur  $\mathbb{R}$

2) Déterminer  $G$  puis en déduire que les primitives d'une fonction impaire, continue sur  $\mathbb{R}$ , sont paires .

# SÉRIES D'EXERCICES N°5

## FONCTIONS LOGARITHMES

### 1 Calcul algébriques

1) Simplifier les expressions suivantes :

a)  $A = \ln(4) + 2 \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

b)  $B = \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

c)  $C = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{2024}{2025}\right)$

2)  $a$  et  $b$  sont deux réels distincts strictement positifs.

a) Comparer  $\sqrt{ab}$  et  $\frac{a+b}{2}$

b) En déduire le plus grand des deux nombres  $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$  et  $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$

3) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique de premier terme  $u_0 = \frac{1}{100}$  et de raison  $q = 3$ . Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n \geq 10^{10}$ .

### 2 Equations et inéquations

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations

a)  $\ln(3 - x^2) = 0$

b)  $2 \ln(x - 3) = \ln(x) - \ln(4)$

c) i) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^2 + 6x - 16 = 0$

ii) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\ln(x - 1) + \ln(x + 6) = \ln(10 - x)$$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations

a)  $\ln(x - 5) < 0$

b)  $\ln(x^2 - 9) \leq 0$

c)  $\ln(3x + 1) - \ln(x + 1) > \ln 2$

### 3 Limites logarithmiques

1) Calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x}$

d)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \ln(x)$

e)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x)}{x}$

2) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer  $\mathcal{D}_f$  l'ensemble de définition de  $f$  puis calculer les limites aux bornes de  $\mathcal{D}_f$ .

a)  $f(x) = x - x \ln(x)$

b)  $f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$

c)  $f(x) = \frac{x}{\ln(x) - 1}$

d)  $f(x) = \ln(\ln x)$

### 4 Dérivée logarithmique

1) Pour chacune des fonctions suivantes, Déterminer  $(\mathcal{D}_f)$ ;  $(\mathcal{D}_{f'})$  puis calculer  $f'(x)$

a)  $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$

b)  $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

c)  $f(x) = \ln(\ln x)$

2) On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

a) Déterminer  $\mathcal{D}_f$

b) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} \text{ pour tout } x \text{ dans } (\mathcal{D}_f)$$

c) En déduire une primitive de  $f$  sur  $] -1; 1[$

### 5 Fonction logarithme décimal

1) Prouver les égalités suivantes :

a)  $\log_2(3) \times \log_3(4) \times \log_4(5) \times \log_5(8) = 3$

b)  $\frac{2 \log_7(125)}{3 \log_7(5)} = 2$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

a)  $\log(x) = 2$

b)  $\log(x) > 5$

c)  $\log(x) \leq -3$

### 6 Problème : Session normale 2023

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$  et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 1cm)

1) a) Vérifier que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$f(x) = \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$$

b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$  et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \text{ (On peut poser } t = \sqrt{x}\text{)}$$

c) Déduire que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  puis donner une interprétation géométrique du résultat

d) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , puis montrer que la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de  $+\infty$

2) Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$f'(x) = \frac{2(1 - x + x \ln x)}{x^2}$$

3) En exploitant le tableau de variation ci-dessous de la fonction  $f'$  de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  :

$x$	0	1	$\beta$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	$f'(\beta)$	0

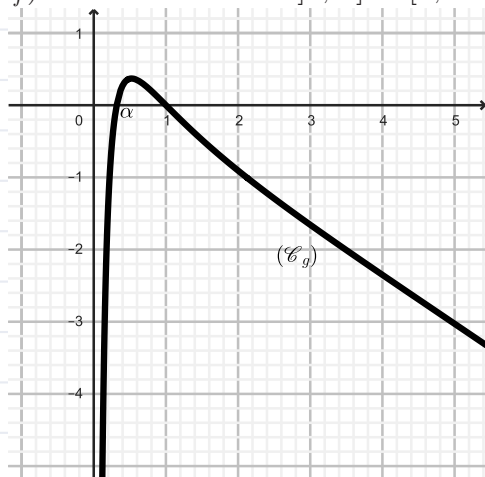
On donne  $\beta \approx 4.9$

- Prouver que  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$
  - Donner le tableau de signe de la dérivée seconde  $f''$  de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$
  - Déduire la concavité de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexion
- 4) La courbe  $(\mathcal{C}_g)$  ci-contre est la représentation graphique de la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$  et qui s'annule en  $\alpha$  et 1;

( $\alpha \approx 0.3$ )

Soit  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = x$

- À partir de la courbe  $(\mathcal{C}_g)$ , déterminer le signe de la fonction  $g$  sur  $]0; +\infty[$
- Déduire que la droite  $(\Delta)$  est en dessous de  $(\mathcal{C}_f)$  sur l'intervalle  $[\alpha; 1]$  et au-dessus de  $(\mathcal{C}_f)$  sur les intervalles  $]0; \alpha]$  et  $[1; +\infty[$



- Construire la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et la droite  $(\Delta)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$   
(On prend  $\alpha \approx 0,3$ ,  $\beta \approx 4,9$  et  $f(\beta) \approx 1,9$ )
- a) Vérifier que la fonction  $x \mapsto 2x - x \ln x$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto 1 - \ln x$  sur  $[\alpha; 1]$
- Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :  

$$\begin{cases} u_0 \in ]\alpha; 1[ \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
- a) Montrer par récurrence que  $\alpha < u_n < 1$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
- b) Montre que la suite  $(u_n)$  est croissante (on peut utiliser la question 4)b)
- c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite

### 7 Problème : Session normale 2025

#### parite I :

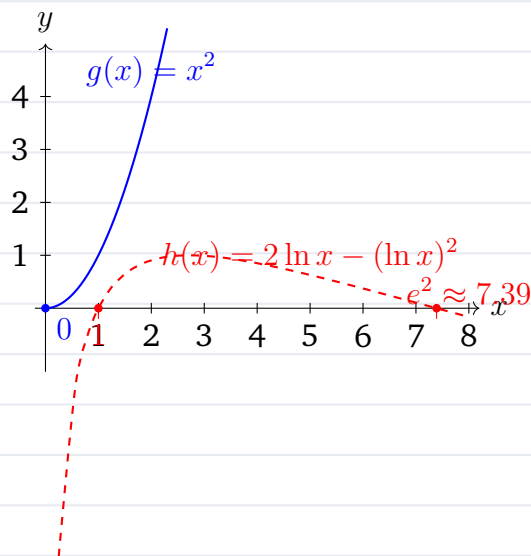
Le graphique ci-dessous représente les courbes  $(\mathcal{C}_g)$  et  $(\mathcal{C}_h)$  des fonctions :  $g : x \mapsto x^2$  et  $h : x \mapsto 2 \ln x - (\ln x)^2$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  dans un même repère orthonormé.

- a) Justifier graphiquement que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  :

$$g(x) - h(x) > 0$$

- b) Déduire que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  :

$$\frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$$



- a) Vérifier que la fonction  $H : x \mapsto x \ln x - x$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto \ln x$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , puis déduire que

$$\int_1^x \ln(x) dx = 1 + e^2$$

- b) En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^x (\ln x)^2 dx = 2e^2 - 2$$

- c) Résoudre sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , l'équation  $h(x) = 0$  et déduire les deux points d'intersection de la courbe  $(\mathcal{C}_h)$  avec l'axe des abscisses.
- d) Déduire, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(\mathcal{C}_h)$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e^2$ .

#### parite II :

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}$$

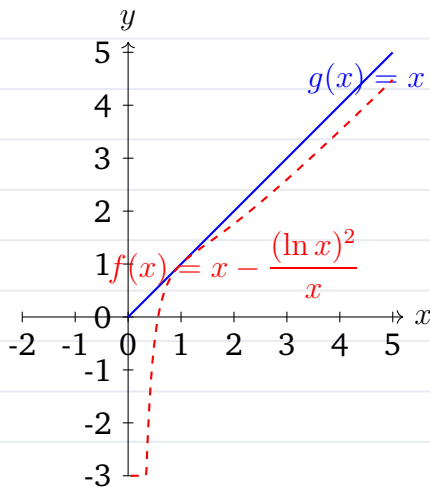
Soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- a) Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  et donner une interprétation géométrique de ce résultat.
  - b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$  (On peut poser  $t = \sqrt{x}$ ), puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - c) Déduire que la droite d'équation  $y = x$  est une asymptote oblique de  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- a) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  

$$f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$
  - b) Montrer que la fonction  $f$  est strictement

croissante sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . (On peut utiliser la question Partie I-1-b.)

- 3)a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
  - b) Vérifier que  $e^{-1} < \alpha < 1$  et montrer que  $\ln \alpha = -\alpha$ .
  - c) Montrer que  $f(x) \leq x$ , pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .
  - d) Montrer que  $y = x$  est l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse 1.
- 4) Le graphique ci-contre représente la courbe  $(C_f)$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $\varphi$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]0, 1]$
- a) Montrer que  $\varphi$  admet une fonction réciproque  $\varphi^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer l'expression  $\varphi^{-1}(x)$ .)
  - b) Montrer que  $\varphi^{-1}$  est dérivable en 0 et que 
$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2 + 2\alpha}$$
  - c) Recopier la courbe de  $\varphi$  et construire la courbe de  $\varphi^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .



**parite III :**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = e$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

- 1) Montrer par récurrence que  $1 < u_n$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
- 2)a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante. (On peut utiliser la question Partie II-3-c)
- b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**8 Problème : Session rattrapage 2022**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2 & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
 et  $(\mathcal{C})$

sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 1cm)

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis déterminer la branche infinie de  $(\mathcal{C})$  au voisinage de  $+\infty$
- 2)a) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0

b) Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0, puis interpréter le résultat géométriquement

- 3)a) Montrer que  $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2 \ln x - 1)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0, +\infty[$
- b) Dresser le tableau de variations de  $f$
- 4)a) Sachant que  $f''(x) = 2x^2(6 \ln x - 5)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0, +\infty[$ , étudier le signe de  $f''(x)$  sur  $]0, +\infty[$
- b) Déduire que la courbe  $(\mathcal{C})$  admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses
- 5)a) Construire la courbe  $(\mathcal{C})$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (On prend  $\sqrt{e} \approx 1,6$  et  $e^2 \approx 7.2$ )
- b) En utilisant la courbe  $(\mathcal{C})$ , déterminer le nombre de solutions de l'équation  $x^2(\ln x - 1) = -1$
- 6) On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(|x|)$
- a) Montrer que la fonction  $g$  est paire
- b) Construire  $(\mathcal{C}_g)$  la courbe représentative de  $g$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 7)a) On pose  $I = \int_1^e x^4(\ln x - 1) dx$ , en utilisant une intégration par partie, montrer que 
$$I = \frac{6 - e^5}{25}$$
- b) On considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = x^5(\ln x - 1)^2$ . Vérifier que  $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$
- c) Déduire que  $\int_1^e f(x) dx = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I$
- d) Calculer l'aire du domaine délimité par  $(\mathcal{C})$  et l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$

**9 Exercice 3 : Session rattrapage 2021**

On considère la fonction numérique  $h$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $h(x) = x + \ln(x)$

- 1) Montrer que la fonction  $h$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$
- 2) Déterminer  $h(]0, +\infty[)$
- 3)a) En déduire que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $]0, +\infty[$
- b) Montrer que  $0 < \alpha < 1$
- 4)a) Vérifier que  $h(\frac{1}{\alpha}) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$
- b) En déduire que  $h(\frac{1}{\alpha}) > 2$

**10 Problème : Session normale 2021**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(0) = 0$  et  $f(x) = 2x \ln x - 2x$  si  $x > 0$  et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 1cm)

- 1) Montrer que  $f$  est continue à droite au point 0
- 2)a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ , puis interpréter géométriquement le résultat

3) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter géométriquement le résultat

b) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$

c) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$

4) a) Résoudre dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  les équations :  $f(x) = 0$  et  $f(x) = x$

b) Construire la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . ( On prend  $e^{\frac{3}{2}} \approx 4,5$  )

5) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :  $\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{1+e^2}{4}$

b) En déduire :  $\int_1^e f(x) \, dx$

6) a) Déterminer le minimum de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$

b) En déduire que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $\ln x \geq \frac{x-1}{x}$

7) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[1; +\infty[$

a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer

b) Construire la courbe représentative de  $g^{-1}$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

8) On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x & ; \quad x \leq 0 \\ h(x) = 2x \ln x - 2x & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Étudier la continuité de  $h$  au point 0

b) Étudier la dérivabilité de la fonction  $h$  à gauche au point 0, puis interpréter géométriquement le résultat

c) La fonction  $h$  est-elle dérivable au point 0? justifier.

**11 Exerice 3 : Session normale 2020**

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

1) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

b) Montrer que  $g$  est croissante sur  $[1; +\infty[$

c) En déduire que pour tout  $x$  de  $[1; +\infty[$ ,  $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$  (remarquer que  $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$ )

d) Montrer que pour tout  $x$  de  $[1; +\infty[$ ,

$$0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$$

2) a) Montrer que la fonction  $G : x \mapsto x(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x)$  est une primitive de  $g$  sur  $]0; +\infty[$

b) Calculer l'intégrale  $\int_1^4 g(x) \, dx$

**12 Problème : Session normale 2019**

**Première parité :**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$  et  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 1cm)

1) a) Vérifier que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$$

b) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

c) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\ln \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$  puis en déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

d) Montrer que la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$

2) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0; 1]$  :  $(x-1) + \ln x \leq 0$  et que pour tout  $x$  de  $[1; +\infty[$ ,  $(x-1) + \ln x \geq 0$

b) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$

c) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$

3) a) Montre que  $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$  pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$

b) En déduire  $(\mathcal{C}_f)$  admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées

4) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$  et en déduire la position relative de  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\Delta)$

b) Construire  $(\Delta)$  et  $(\mathcal{C}_f)$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

5) a) Montrer que la fonction  $H : x \mapsto x \ln x - x$  est une fonction primitive de la fonction  $h : x \mapsto \ln x$  sur  $]0; +\infty[$

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 1$

c) Calculer en  $cm^2$  l'aire du domaine plan limité par  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\Delta)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$

**Deuxième parité :**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que  $1 \leq u_n \leq e - \ln x$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

b) Montre que la suite  $(u_n)$  est croissante

c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente

2) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$

# SÉRIES D'EXERCICES N°6

## LES NOMBRES COMPLEXES

### 1 Opérations sur les nombres complexes

1) La proposition suivante sont elle vraie ou fausse (justifier les réponses)  $\forall (z_1, z_2, z'_1, z'_2) \in \mathbb{C}^2$

$$z_1 + iz_2 = z'_1 + iz'_2 \iff z_1 = z'_1 \text{ et } z_2 = z'_2$$

2) On considère les nombres complexes :  $z_1 = 1 + 5i; z_2 = 5 - i; z_3 = 2i$ . Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 - z_2; z_1 \times z_2; \frac{1}{z_3}; \frac{z_1}{z_2}; (z_3)^{11}$$

3) On pose  $f(z) = \frac{1 + 2i + z}{1 + z}$  avec  $z = x + iy \neq -1$

a) Exprimer  $\Re(f(z))$  et  $\Im(f(z))$  en fonction de  $x$  et  $y$

b) Déterminer l'ensemble  $E_1$  des points  $M(x, y)$  pour lesquels  $f(z)$  est réel

c) Déterminer l'ensemble  $E_2$  des points  $M(x, y)$  pour lesquels  $f(z)$  imaginaires pur

4) Le plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Pour tout nombre complexe  $z$ , on pose  $z' = (1 - i)z + 2 + i$ . Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  tel que  $z'$  soit réel.

### 2 Conjugué et Module d'un nombre complexe

1) Calculer le module de  $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$  et le module de  $(1+i)^{2026}$

2) soit  $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ . On pose  $Z = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$ . Montrer que  $|Z| = 1$

3) Montrer que  $\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}; |z| = 1 \implies i\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \in \mathbb{R}$

4) Montrer que  $\forall z \in \mathbb{C}$  :

$$\frac{|Re(z)| + |Im(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$$

5) Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie la condition indiquée

a)  $|z - i| = \sqrt{3}$

b)  $|z - 1 + i| = |z + i|$

c)  $|iz + 3| = |z + 4 + i|$

d)  $\left|\bar{z} + \frac{1}{3}i\right| = 3$

e)  $|1 + iz| = 2$

f)  $|2z - 4i| = 2|z + i + 1|$

6) Montrer que  $\forall z \in \mathbb{C}; |z - i| = |z + i| \implies z \in \mathbb{R}$

7) Interpréter géométriquement le résultat précédent

### 3 Argument d'un nombre complexe non nul - forme trigonométrique

1) a) Déterminer un argument de  $z_1 = 1 - i$  ;  $z_2 = 2i$  ;  $z_3 = \sqrt{3} + i$

b) En déduire un argument du complexe  $z = \frac{(1-i)2i}{\sqrt{3}+i}$

c) Déterminer la forme trigonométrique de  $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$

2) On considère les nombres complexes  $z_1 = 1 + i$  et  $\sqrt{3} - i$

a) Déterminer la forme trigonométrique de  $z_1$  ;  $z_2$  et  $z_1 z_2$ .

b) Déterminer la forme algébrique de  $z_1 z_2$

c) En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$

3) Déterminer un argument de  $z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$  et

$$z_2 = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$$

### 4 Notation exponentielle

1) On considère les nombres complexes

$$z_1 = \sqrt{2}(1 + i) \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

a) Déterminer la forme exponentielle de  $z_1$  ;  $z_2$  et  $\frac{z_1}{z_2}$

b) Déterminer la forme algébrique de  $\frac{z_1}{z_2}$

c) En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et

$$\sin \frac{5\pi}{12}$$

2) Calculer  $(1 + i\sqrt{3})^{2026}$

3) Déterminer la forme exponentielle de  $z = e^{-i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$

### 5 Linéarisation

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin^4 x$ .

a) En utilisant les formules d'Euler, linéariser  $f(x)$ .

b) En déduire une primitive de  $f(x)$

2)

3) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin(x) \times \sin(2x)$

a) En utilisant les formules d'Euler, écrire  $f(x)$  sous la forme d'une somme.

b) En déduire une primitive de  $f(x)$ .

4) a) En utilisant la formule  $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ , exprimer pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos^4 x$  en fonction de  $\cos 2x$  et  $\cos 4x$

b) Retrouver ce résultat en utilisant les formules d'Euler

5) Linéariser  $\sin^6 x$

**6 L' équation :  $az^2 + bz + c = 0$**   
Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations

1)  $z^2 - z + 1 = 0$

2)  $z^2 - 2z + 2 = 0$

3)  $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

**7 Applications des nombres complexes à la géométrie**

1) Soient  $A(2), B(2i), C(2 + 2i)$  et  $D(1 + i)$ .

a) Donner la nature du triangle  $ACB$ .

b) Montrer de deux façons que  $A, B$  et  $D$  sont alignés.

2) Montrer que les points  $A(1 + 3i), B(3 + i), C(5 + 3i)$  et  $D(3 + 5i)$  sont cocycliques

**8 Ecriture complexe des transformations usuelles**

1) Déterminer la nature des transformations suivantes

a)  $z' = 3 - z$

b)  $z' = z - 1 - 2i$

c)  $z' = iz + 1 - i$

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives

$a = 2 - 2i; b = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  et

$c = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$ .

a) Donner la forme trigonométrique des nombres  $a$  et  $b$

b) On considère la rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{5\pi}{6}$

i) On note  $M'(z')$  l'image du point  $M(z)$  par la rotation  $R$ . Montrer que  $z' = bz$

ii) Vérifier que le point  $C$  est l'image du point  $A$  par la rotation  $R$

c) Montrer que  $\arg(c) \equiv \arg(a) + \arg(b) [2\pi]$  puis déterminer un argument du nombre complexe  $c$

**9 Exercice 2 : Session normale 2025**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , considère les points  $A, B, C, D$  et  $\Omega$  d'affixes respectives

$a = 1 + 2i, b = \bar{a}, c = \frac{3(3+i)}{2}, d = \frac{3(1+i)}{2}$

$\omega = \frac{5}{2}$ .

1) a) Vérifier que  $a + b = 2$  et déduire que l'affixe du point  $P$ , milieu du segment  $[AB]$ , est  $p = 1$ .

b) Montrer que  $a$  et  $b$  sont les solutions de l'équation :  $z^2 - 2z + 5 = 0$  dans l'ensemble  $\mathbb{C}$ .

2) a) Vérifier que :  $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$ .

b) Déduire que  $\Omega$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

3) a) Vérifier que  $\frac{d - c}{a - b} = \frac{3}{4}i$ .

b) Montrer que  $d - b = (c - a)e^{i\frac{\pi}{2}}$  puis déduire que les droites  $(DB)$  et  $(AC)$  sont perpendiculaires.

4) Soit  $h$  l'homothétie de centre  $C$  et de rapport  $\frac{2}{3}$  et qui transforme chaque point  $M$  du plan d'affixe  $z$  en un point  $M'$  d'affixe  $z'$ . On pose  $h(P) = G$ .

a) Vérifier que

$$z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

b) Montrer que l'affixe du point  $G$  est

$$g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i.$$

5) Montrer que les points  $\Omega, G$  et  $D$  sont alignés.

**10 Exercice 3 : Session rattrapage 2025**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives :

$a = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, b = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, c = 1 + a$  et  $d = \bar{c}$ .

1) Vérifier que  $|a| = 1$  et que  $\arg(a) = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$ .

2) Vérifier que  $\frac{c - d}{c - a} = i$  et déduire que le triangle  $ACD$  est isocèle rectangle en  $C$ .

3) a) Montrer que  $d - a = 1 - i$  et que  $b - d = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$ .

b) Déduire que les points  $A, D$  et  $B$  sont alignés.

4) Soit  $R$  la transformation du plan qui transforme chaque point  $M$  d'affixe  $z$  en  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = az$ .

a) Vérifier que  $R$  est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

b) Vérifier que  $ad = c$  et déduire que  $R(D) = C$ .

c) Montrer que  $\arg(c) = \frac{5\pi}{12} [2\pi]$ .

**11 Exercice 3 : Session normale 2024**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives

$a = \sqrt{3}(1 - i)$  et  $b = 2 + \sqrt{3} + i$ .

1) Vérifier que  $|a| = \sqrt{6}$  et que  $\arg(a) = \frac{-\pi}{4} [2\pi]$ .

2) a) Montrer que

$$\frac{b}{a} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} + \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) i$$

puis vérifier que

$$\frac{b}{a} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

b) En déduire une forme trigonométrique du complexe  $b$  puis vérifier que  $b^2 4$  est un nombre réel.

3) Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ , qui transforme chaque point  $M$  du plan d'affixe  $z$  en un point  $M'$  d'affixe  $z'$ . On pose  $R(B) = B'$ ,  $R(A) = A'$  et  $R(A') = A''$ .

a) Vérifier que  $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$  et que

$\arg(a') = \frac{-\pi}{12} [2\pi]$  où  $a'$  est l'affixe du point

$A'$ .

b) Montrer que l'affixe du point  $A''$  est  $a'' = \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{12}}$  et en déduire que les points  $O, A''$  et  $B$  sont alignés.

c) Montrer que  $b'$ , l'affixe du point  $B'$ , vérifie

$$b' = \left( \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \right) \bar{a}.$$

d) En déduire que le triangle  $OAB'$  est rectangle en  $O$ .

## 12 Exercice 2 : Session rattrapage 2024

I) On considère dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) : z^2 - 4z + 9 = 0$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation  $(E)$  est  $\Delta = (2\sqrt{5}i)^2$ .

2) Résoudre l'équation  $(E)$ .

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points

$A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = 2 + i\sqrt{5}$  ;

$b = 2 - i\sqrt{5}$  et  $c = 2 - \sqrt{5}$ .

1) a) Vérifier que  $|a| = 3$ .

b) Montrer que le triangle  $OAB$  est isocèle.

2) a) Vérifier que

$$\frac{a - c}{b - c} = i.$$

b) Déduire la nature du triangle  $ABC$ .

3) a) Déterminer l'affixe du point  $D$  image de  $B$  par la translation de vecteur  $\vec{CA}$ .

b) Montrer que  $ADBC$  est un carré.

4) On pose  $x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n$  et  $y_n = \frac{1}{1 - x_n}$ , avec  $n$  un entier naturel non nul.

a) Vérifier que  $x_n \cdot \bar{x}_n = 1$ .

b) Montrer que  $y_n + \bar{y}_n = 1$  puis déduire la partie réelle de  $y_n$ .

## 13 Exercice 2 : Session normale 2023

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives

$a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ,  $b = 1 + \sqrt{2} + i$ ,  $c = \bar{b}$  et  $d = 2i$

1) Écrire le nombre complexe  $a$  sous forme trigonométrique.

2) a) Vérifier que  $b - d = c$

b) Montrer que  $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d$  et déduire que les points  $A, B$  et  $D$  sont alignés

3) a) Vérifier que  $ac = 2b$

b) En déduire que  $2\arg(b) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

4) Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et qui transforme chaque point  $M$  du plan d'affixe  $z$  en un point  $M'$  d'affixe  $z'$

a) Montrer que  $z' = \frac{1}{2}az$

b) En déduire que  $R(C) = B$  et que  $R(A) = D$

c) Montrer que  $\frac{b - a}{c - a} = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)a$ , puis

déduire une mesure de l'angle  $(\widehat{AC}, \widehat{AB})$

## 14 Exercice 3 : Session rattrapage 2023

1) On considère le nombre complexe

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

a) Montrer que  $a = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b) Déduire que  $a^{2022}$  est un nombre réel

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , considère les points  $A, B$  d'affixes respectives  $a$  et  $\bar{a}$ . Déterminer une mesure de l'angle de la rotation  $R$  de centre  $O$  et qui transforme  $B$  en  $A$

3) On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $E_a : z^2 - \sqrt{3}z + \alpha = 0$  où  $\alpha$  est un nombre réel non nul

On suppose que l'équation  $E_a$  admet deux racines complexes conjuguées non réelles  $z$  et  $\bar{z}$

Soient les points  $M(z)$ ;  $N(\bar{z})$  et  $P(\sqrt{3})$  du plan complexes.

Sans résoudre l'équation  $E_a$  :

a) Justifier que  $\alpha > \frac{3}{4}$  et que  $\alpha = z\bar{z}$

b) Montrer que :  $|z| = |z - \sqrt{3}|$

c) En déduire que les points  $M$  et  $N$  appartiennent à la médiatrice  $(\Delta)$  du segment  $[OP]$

d) Déterminer la valeur de  $\alpha$  pour laquelle  $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$  et déduire dans ce cas, les points d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et le cercle de centre  $P$  et de rayon  $\sqrt{3}$

**15 (Exercice 2 : Session normale 2022)**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , considère le point  $A$  d'affixe  $a = -1 - i\sqrt{3}$ , le point  $B$  d'affixe

$b = -1 + i\sqrt{3}$  et la translation  $t$  de vecteur  $\vec{OA}$

1) Prouver que l'affixe du point  $D$  image du point  $B$  par la translation  $t$  est  $d = -2$

2) On considère la rotation  $R$  de centre  $D$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

Montrer que l'affixe du point  $C$  image de  $B$  par la rotation  $R$  est  $c = -4$

3) a) Ecrire  $\frac{b-c}{a-c}$  sous forme trigonométrique

b) En déduire que  $(\frac{b-c}{a-c})^2 = \frac{c-d}{b-d}$

4) Soient  $(\Gamma)$  le cercle de centre  $D$  et de rayon 2,  $(\Gamma')$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 4 et  $M$  un point d'affixe  $z$  appartenant aux deux cercles  $(\Gamma)$  et  $(\Gamma')$

a) Vérifier que  $|z+2| = 2$

b) Prouver que  $z + \bar{z} = -8$  (remarque que  $|z| = 4$ )

c) En déduire que les cercles  $(\Gamma)$  et  $(\Gamma')$  se coupent en un point qu'on déterminera.

**16 Exercice 3 : Session rattrapage 2022**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $Z_A = 1+5i$ ,  $Z_B = 1-5i$  et  $Z_C = 5-3i$

1) Déterminer le nombre complexe  $Z_D$  affixe du point  $D$  milieu du segment  $[AC]$

2) Soit  $h$  l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\frac{1}{2}$ .

Déterminer le nombre complexe  $Z_E$  affixe du point  $E$  l'image de  $B$  par  $h$

3) On considère la rotation  $R$  de centre  $C$  et d'angle  $\frac{-\pi}{2}$ , déterminer l'image de  $B$  par  $R$

4) Soit  $F$  le point d'affixe  $Z_F = -1+i$

a) Vérifier que  $\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$

b) En déduire que  $(\vec{AF}, \vec{AD}) + (\vec{ED}, \vec{EF}) \equiv \pi [2\pi$

c) Déterminer la forme trigonométrique du nombre  $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$  et déduire la nature du triangle  $AEF$

d) Déduire que les points  $A, D, E$  et  $F$  appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.

**17 (Exercice 2 : Session rattrapage 2021)**

1) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :  $z^2 - 6z + 13 = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté au repère

orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = 3 + 2i$ ,  $b = 3 - 2i$  et  $c = -1 - 2i$

a) Ecrire  $\frac{c-b}{a-b}$  sous forme trigonométrique

b) En déduire la nature du triangle  $ABC$

3) Soit  $R$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

Soit  $z$  l'affixe d'un point  $M$  du plan et  $z'$  l'affixe du point  $M'$  image de  $M$  par la rotation  $R$ , et soit  $D$  le point d'affixe  $d = -3 - 4i$

a) Ecrire  $z'$  en fonction de  $z$

b) Vérifier que  $C$  est l'image de  $A$  par la rotation  $R$

4) a) Montrer que les points  $A, C$  et  $D$  sont alignés

b) Déterminer le rapport de l'homothétie  $h$  de centre  $C$  qui transforme  $A$  en  $D$

c) Déterminer l'affixe  $m$  du point  $E$  pour que le quadrilatère  $BCDE$  soit un parallélogramme

5) a) Montrer que  $\frac{d-a}{m-b}$  est un nombre réel.

b) En déduire que le quadrilatère  $ABED$  est un trapèze isocèle.

**18 (Exercice 2 : Session normale 2021)**

1) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :  $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

2) Soient les nombres complexes  $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$  et  $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Ecrire  $a$  sous forme algébrique

b) Vérifier que  $\bar{a}b = \sqrt{3}$

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a, b$  et  $\bar{a}$

3) Montrer que le point  $B$  est l'image du point  $A$  par une homothétie  $h$  de centre  $O$  dont on déterminera le rapport.

4) Soient  $z$  l'affixe d'un point  $M$  du plan et  $z'$  l'affixe du point  $M'$  image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

a) Ecrire  $z'$  en fonction de  $z$  et  $a$

b) Soit  $d$  l'affixe du point  $D$  image de  $C$  par la rotation  $R$ , montrer que  $d = a + 1$

c) Soit  $I$  le point d'affixe 1, montrer que  $ABIO$  est un losange.

5) a) Vérifier que  $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$ ; en déduire un argument du nombre  $d - b$

b) Ecrire  $1 - b$  sous forme trigonométrique

c) Déduire une mesure de l'angle  $(\vec{BI}, \vec{BD})$



# SÉRIES D'EXERCICES N°7

## FICHE DE RÉVISION GLOBALE : NOMBRES COMPLEXES

### 1 Figures Géométriques

- Soient  $A, B, C$  trois points d'affixes respectives :  $2 + 2\sqrt{3}i$ ;  $-4$ ;  $-1 + \sqrt{3}i$ .  
Démontre que ces trois points sont alignés.
- Soient  $A, B, C$  d'affixes :  $2 + 2\sqrt{3}i$ ;  $2 - 2\sqrt{3}i$ ;  $-1 + \sqrt{3}i$ .  
Démontre que les droites  $(AC)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires.
- Soient  $A, B, C, D$  d'affixes :  $2 + 2\sqrt{3}i$ ;  $2 - 2\sqrt{3}i$ ;  $-1 + \sqrt{3}i$ ;  $-1 + i$ .  
Démontre que  $(AB) \parallel (CD)$ .
- Soient  $A, B, C$  d'affixes :  $1 - 3i$ ;  $4 + 5i$ ;  $-3 + 2i$ .
  - Détermine l'affixe des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .
  - Détermine les distances  $AB$  et  $AC$ .
- Soient  $A, B, C$  d'affixes :  $3 + i$ ;  $2i$ ;  $2 - 2i$ .
  - Démontre que  $ABC$  est un triangle rectangle et isocèle en  $A$ .
  - Détermine l'affixe de  $D$  tel que  $ABCD$  soit un parallélogramme. (Faire une figure).
- Soient  $A, B, C, D$  d'affixes :  $-1 + i$ ;  $-1 - i$ ;  $2i$ ;  $2 - 2i$ .
  - Étudie la nature des triangles  $ACD$  et  $BCD$ .
  - Démontre que  $A, B, C, D$  appartiennent à un même cercle (préciser centre et rayon).
- Soient  $A, B, C, D$  d'affixes :  $2\sqrt{3} + 9i$ ;  $-i$ ;  $-4\sqrt{3} - 9i$ ;  $-2\sqrt{3} + i$ .  
Démontre que le quadrilatère  $ABCD$  est un losange.
- Soient  $A, B, C, D$  d'affixes :  $3i$ ;  $-2 + i$ ;  $1 - 2i$ ;  $3$ .  
Démontre que le quadrilatère  $ABCD$  est un rectangle.
- Soient  $A, B, C, D$  d'affixes :  $-1 + 3i$ ;  $-2$ ;  $-1 - i$ ;  $-2 + 2i$ .  
Démontre que le quadrilatère  $ABCD$  est un trapèze isocèle.
- Soient  $A, B, C, D$  d'affixes :  $-5 - i$ ;  $-3 - 3i$ ;  $-1 - i$ ;  $-3 + i$ .  
Démontre que le quadrilatère  $ABCD$  est un carré.
- Soient  $A, B, C, D$  d'affixes :  $2i$ ;  $-1 - i$ ;  $2 - 2i$ ;  $3\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i$ .  
Démontre que le quadrilatère  $ABCD$  est un trapèze rectangle.
- Montrer que les points  $A(1 + 3i)$ ,  $B(3 + i)$ ,  $C(5 + 3i)$  et  $D(3 + 5i)$  sont cocycliques.

### 2 Ensemble des points

- L'ensemble  $(E_1)$  des points  $M$  tels que :  
 $|z - i| = |1 - i|$

- L'ensemble  $(E_2)$  des points  $M$  tels que :  
 $|z + 1 - 2i| = |z - 1 - i|$
- L'ensemble  $(E_3)$  des points  $M$  tels que :  
 $|z| = 2|z - i|$
- L'ensemble  $(E_4)$  des points  $M$  tels que :  
 $(z + 2i)(\bar{z} - 2i) = 4$
- L'ensemble  $(E_5)$  des points  $M$  tels que :  
 $\left(\frac{z - 2 - i}{z + 1 + i}\right) \in \mathbb{R}$
- L'ensemble  $(E_6)$  des points  $M$  tels que :  
 $\arg(\bar{z}) \equiv \arg(-z)[2\pi]$
- L'ensemble  $(E_7)$  des points  $M$  tels que :  
 $\arg(z - 1 - i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$
- L'ensemble  $(E_8)$  des points  $M$  tels que :  
 $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$  et  $|z| = 2$
- L'ensemble  $(E_9)$  des points  $M$  tels que :  
 $\arg\left(\frac{z - 2 - 2i}{z - 2}\right) \equiv 0[2\pi]$
- L'ensemble  $(E_{10})$  des points  $M$  tels que :  
 $\arg\left(\frac{z - 2 - i}{z + 1 + i}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- L'ensemble  $(E_{11})$  des points  $M$  tels que :  
 $|\bar{z} + 1 + 2i| \leq 1$
- L'ensemble  $(E_{12})$  des points  $M$  tels que :  
 $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 6$

### 3 Applications à la trigonométrie

- Soient les nombre complexes :  $a = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$   
et  $b = 1 - i$ 
  - Ecrire sous forme trigonométrique  $a$ ;  $b$  et  $\frac{a}{b}$
  - Déterminer la forme algébrique de  $\frac{a}{b}$
  - En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$
  - En déduire les solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation :  
 $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(x) = 2$
- Linéarise les expressions suivantes :
 

<ol style="list-style-type: none"> <li><math>\cos^2 x</math></li> <li><math>\sin^2 x</math></li> <li><math>\sin^4 x</math></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>\cos^4 x</math></li> <li><math>\cos^3 2x</math></li> <li><math>\sin^3 x \times \cos^2 x</math></li> </ol>
---	--
- Exprime en fonction des puissances de  $\cos x$  et de  $\sin x$  :
 

<ol style="list-style-type: none"> <li><math>\sin 3x</math></li> <li><math>\cos 3x</math></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li><math>\sin 4x</math></li> <li><math>\cos 5x</math></li> </ol>
--	--

# SÉRIES D'EXERCICES N°8

## FONCTION EXPONENTIELLE

### 1 Définition et propriété algébrique

1) Montrer que pour tout réel  $x$  on a :

$$\bullet \frac{e^{x+1}}{e + e^{x+1}} = \frac{e^x}{e^x + 1}$$
$$\bullet \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$
$$\bullet \ln(e^x + 1) - \ln(e^{-x} + 1) = x$$

2) Montrer que la fonction  $f(x) = 2 + \ln(x)$  admet un point fixe dans  $[1; e^2]$

### 2 Exercice 1 : Session normale 2021

1) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$

c) Calculer la limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$

2) Montrer que l'équation  $e^{2x} + e^x + 4x = 0$  admet une solution sur  $[-1; 0]$

### 3 Exercice 1 : Session rattrapage 2011

1) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $x^2 - 2x - 3 = 0$

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$

### 4 Limites de référence

Calculer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^2$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - e^{-x}$

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x \ln(x)$

6)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{x^2 + 1}$

7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$

8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln(x)}{e^x - x^2}$

9)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x)e^x$

10)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$

11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(x + 1)}$

12)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + x}{x}$

### 5 Primitives de la fonction $x \rightarrow u'(x)e^{u(x)}$

1) Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée sur  $I$

a)  $f(x) = e^{-2x} + e^2$  et  $I = \mathbb{R}$

b)  $f(x) = x^3 e^{2x}$  et  $I = \mathbb{R}$

c)  $f(x) = e^{x \ln(x)}$  et  $I = ]0; +\infty[$

2) Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur les intervalles indiqués :

a)  $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$  et  $I = ]0; +\infty[$

b)  $f(x) = \cos x e^{\sin x}$  et  $I = \mathbb{R}$

c)  $f(x) = 2x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$  et  $I = \mathbb{R}$

d)  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$  et  $I = \mathbb{R}$

### 6 Fonction exponentielle de base $a$

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

•  $36^{3x} = \frac{1}{6}$

•  $2 \times 3^{x+1} = 3^{2x-1}$

•  $5 \times 3^x = 4 \times 2^x$

•  $5^{2x+2} - 126 \times 5^{x+1} + 125 = 0$

•  $(5^x - 2)(3^{x+3} - 9^{x+1} - 18) \leq 0$

### 7 Problème : (session normale 2024)

#### Partie I

On considère les deux fonctions  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = e^x$  et  $v(x) = x$

1) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes  $(C_e)$  et  $(C_v)$  des fonctions  $u$  et  $v$ .

2) Justifier graphiquement que  $e^x - x > 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C_e)$ , la courbe  $(C_v)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

#### Partie II

On considère la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$ .

1) a) Vérifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \ln(1 - x e^{-x})$ .

c) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , puis interpréter géométriquement ce résultat.

2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) Vérifier que pour tout  $x < 0$ ,  
 $f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$ .

c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis déduire que la courbe  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = x$  au voisinage de  $-\infty$ .

3) a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  
 $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$ .

b) Étudier le signe de la fonction dérivée de  $f$ , puis déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $] -1, 0[$ .

4) La courbe  $(C_f)$  ci-contre est la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé.

a) Justifier graphiquement que l'équation  $f(x) = x$  admet deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$ .

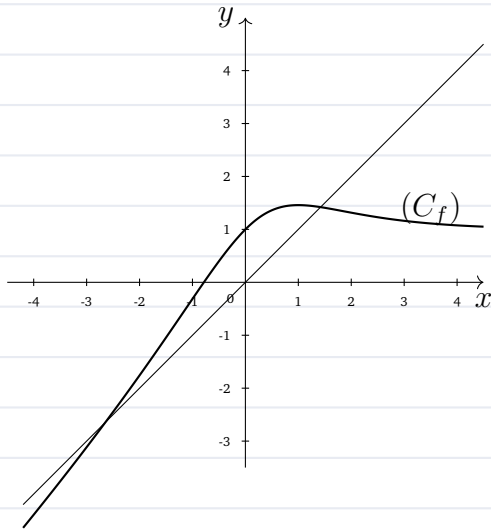
b) Montrer que :  $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$ .

5) Soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I = ] -\infty, 1[$

a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.

(Il n'est pas demandé de déterminer  $g^{-1}(x)$ ).

b) Vérifier que  $g^{-1}$  est dérivable en 1 et calculer  $(g^{-1})'(1)$ .



**8 Problème : Session normale 2022**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$ . Soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 1cm)

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ , et interpréter géométriquement le résultat.

3) a) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$

b) Étudier le signe de  $(f(x) - x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  en en déduire la position relative de la courbe  $(C_f)$  et de la droite  $(\Delta)$

4) a) Montrer que  $f'(x) = (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 + xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 1)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

b) vérifier que  $x(e^{\frac{x}{2}} - 1) \geq 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  puis en déduire le signe de la fonction dérivée  $f'$  sur  $\mathbb{R}$

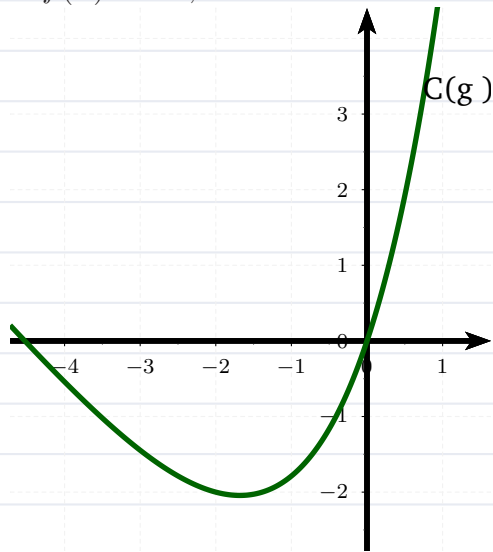
c) Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$

a) Montrer que  $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$  ;  
 où  $g(x) = (2x + 4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

b) A partir de la courbe ci-contre de la fonction  $g$ , déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$  (Remarque :  $g(\alpha) = 0$ )

5) c) Étudier la concavité de la courbe  $(C)$  et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions

d) Construire la courbe  $(C)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$   
 (On prend :  $\ln(4) \approx 1,4$ ,  $\alpha \approx -4,5$  et  $f(\alpha) \approx -3,5$ )



6) a) Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$

b) Calculer  $(f^{-1})'(\ln(4))$

7) Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :  
 $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que  $0 < u_n < \ln(4)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente

d) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$

# **SÉRIES D'EXERCICES N°9** **EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES**

## 1 l'Equation différentielle $y' = ay + b$

1) Résoudre les équations différentielles :

$$\begin{array}{l}
 \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 3y' - 2y = 0 \\ 3y' - 2y = 4 \end{array} \right. \\
 \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 3y' - 2y = 4 \\ y(2) = 4 \end{array} \right.
 \end{array}$$

2) On considère les équations différentielles :

$$(E) : y' + 2y = 4x + 3 \text{ et } (F) : y' + 2y = 4$$

a) Montrer que si la fonction  $f$  est solution

de l'équation  $(E)$  alors  $f'$  est solution de

l'équation  $(F)$

b) Résoudre l'équation différentielle  $(F)$

c) En déduire les solutions de l'équation  $(E)$

d) Déterminer la solution  $F$  de l'équation  $(E)$

dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point  $A(1, 0)$

## 2 l'Equation différentielle $y'' + ay' + by = 0$

1) a) Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$$

b) Déterminer la solution  $g$  de l'équation

différentielle  $(E)$  tel que :

$$\begin{cases} g(0) = -3 \\ g'(0) = -2 \end{cases}$$

2) Résoudre l'équation  $(E_1) : y'' - 2y' + y = 0$

3) Résoudre l'équation  $(E_2) : y'' - y' + y = 0$

# SÉRIES D'EXERCICES N°10

## CALCUL INTÉGRAL

### 1 Utilisation des fonctions primitives

1) Calculer les intégrales suivantes :

a)  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos t \, dt$

b)  $I_2 = \int_0^{\pi} x \cos t \, dx$

c)  $I_3 = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$

d)  $I_4 = \int_0^2 2^x \, dx$

e)  $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$

f)  $I_5 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$

2) Calculer les intégrales suivantes :

a)  $I_1 = \int_0^2 |x^2 - 3x + 2| \, dx$

b)  $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \, dx$

c)  $I_3 = \int_1^e \frac{1}{x} \, dx$

d)  $I_4 = \int_1^2 \frac{-x + 3}{x^2 - 6x + 1} \, dx$

e)  $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) \, dx$

### 2 Intégration par parties

1) Calculer les intégrales suivantes :

a)  $I_1 = \int_1^x \ln t \, dt$  ,  $x > 0$

b)  $I_2 = \int_0^1 x e^x \, dx$

c)  $I_3 = \int_0^1 x e^{-x} \, dx$

d)  $I_4 = \int_0^1 x^2 e^x \, dx$

e)  $I_5 = \int_1^2 x^2 \ln(x) \, dx$

f)  $I_6 = \int_1^2 \ln(x^2) \, dx$

g)  $I_7 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(x+1)^2} \, dx$

h)  $I_8 = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$

i)  $I_9 = \int_1^e x(\ln x)^2 \, dx$

j)  $I_{10} = \int_0^1 x^3 e^{x^2} \, dx$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n \, dx$

Montrer que :  $\forall n \geq 1; 2I_n + nI_{n-1} = e^2$

### 3 Calcul d'aires

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$f(x) = x e^{-x^2}$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative

dans un repère orthogonal d'unité graphique

1cm en abscisse et 2cm en ordonnées . Soit

$t$  un réel strictement positif .

a) Calculer l'aire du domaine  $\mathcal{A}(t)$  limité

par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites

d'équations  $x = 0; x = t$

b) Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t)$

2) On considère  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$f(x) = x e^{-x}$  et  $g(x) = x^2 e^{-x}$  .  $(C_f)$  et  $(C_g)$

leurs courbes représentatives dans un repère

orthogonal d'unité graphique 2cm en abscisse et

5cm en ordonnées .

a) Étudier la position relative de  $(C_f)$  et  $(C_g)$

sur l'intervalle  $[0; 1]$

b) Calculer l'aire du domaine  $(\Delta)$  limité par

$(C_f)$ ,  $(C_g)$  et les deux droites d'équations

$x = 0$  et  $x = 1$

3) On considère  $f$  et  $F$  définies sur  $]1; +\infty[$  par

$f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$  et  $F(x) = \ln(\ln(x))$  .  $(C_f)$

la courbe représentative de  $f$  dans un repère

orthogonal d'unité graphique  $1\text{cm}$  en abscisse et  $1\text{cm}$  en ordonnée .

a) Calculer  $F'(x)$  pour tout réel  $x$  dans  $]1; +\infty[$  puis en déduire une primitive de  $f$  sur  $]1; +\infty[$

b) Calculer l'aire du domaine  $(\Delta)$  limité par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations  $x = e$  et  $x = e^2$

4) On désigne par  $(C_f)$  et  $(C_g)$  les courbes représentative de  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$

Calculer l'aire du domaine  $(\Delta)$  limité par  $(C_f)$ ,  $(C_g)$  et les deux droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  dans chacun des cas suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} f(x) = e^x \\ g(x) = e^{-x} \\ a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} f(x) = -x^2 + x - 2 \\ g(x) = 0 \\ a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x-1} \\ g(x) = 0 \\ a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} f(x) = -x^2 + 4x \\ g(x) = x \\ a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} f(x) = \cos x \\ g(x) = \sin x \\ a = 0 \\ b = \pi \end{cases}$$

#### 4 Calcul des volumes

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel que  $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$

Calculer en  $\text{cm}^3$  le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe de la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I$  en faisant un tour complet autour de l'axe  $(o, \vec{i})$  dans chacun des cas suivants :

1)  $f(x) = x^3$  et  $I = [0; 2]$

2)  $f(x) = \ln x$  et  $I = [1; e]$

3)  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{\sqrt{x}}$  et  $I = [1; e]$

4)  $f(x) = \sin x$  et  $I = [0; \frac{\pi}{2}]$

#### 5 Méthodes d'intégrations

1) Calculer les intégrales suivantes :

a)  $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x} + 2}{e^{3x}} dx$

b)  $I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx$

c)  $I_3 = \int_0^1 \frac{x^2 - x + 5}{x + 3} dx$

d)  $I_4 = \int_2^3 \frac{x^3 + 4x - 1}{x^2 - 1} dx$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $I_n = \int_1^2 \ln(\frac{1+x}{x^n}) dx$

a) En intégrant par partie, calculer  $I_0$

b) Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante

c) Conclure

# SÉRIES D'EXERCICES N°11

## PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_3$ ET SES APPLICATIONS

### 1 Définition et propriété

On considère le cube  $ABCDEFGH$  d'arrête  $a$  ;  
 $J$  milieu de  $[FG]$ . Calculer en fonction de  $a$

- 1)  $\vec{EG} \cdot \vec{HF}$
- 2)  $\vec{EG} \cdot \vec{EC}$
- 3)  $\vec{DF} \cdot \vec{DH}$
- 4)  $\vec{DB} \cdot \vec{EG}$
- 5)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- 6)  $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$
- 7)  $\vec{AB} \cdot \vec{EG}$
- 8)  $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$
- 9)  $\vec{AB} \cdot \vec{EH}$
- 10)  $\vec{AE} \cdot \vec{DG}$

### 2 Expression analytique

1) Dans l'espace  $(\mathcal{E})$  muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points :  $A(2, -5, 1)$  ;  $B(0, 2, 6)$  et  $C(-2, 3, 1)$

Démontrez que la droite  $(\Delta)$  passant par  $C$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(-4, 1, -3)$  est orthogonale à la droite  $(AB)$

2) On considère dans l'espace  $\mathcal{V}_3$  les points  $A(1, 1, \sqrt{2})$ ,  $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$  et  $C(-1, -1, -\sqrt{2})$ .

- a) Calculer  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ . Conclure.
- b) Calculer les distances  $BA$  et  $BC$ .
- c) Conclure.

### 3 Vecteur normal à un plan - Equation cartésienne d'un plan définie par un point et un vecteur normal à ce plan

1) Soit  $(\mathcal{P})$  un plan de l'espace. Montrer que : un vecteur non nul  $\vec{n}$  est normal au plan  $(\mathcal{P})$

si et seulement si  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan  $(\mathcal{P})$

2) Dans l'espace  $(\mathcal{E})$  muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points :  $A(3, -2, 1)$  ;  $B(5, 2, -3)$  et  $C(6, -2, -2)$

- a) Vérifier que les points  $A$  ;  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés
- b) Vérifier que le vecteur  $\vec{n}(2, 1, 2)$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$
- c) En déduire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$

### 4 Distance d'un point à un plan

Dans l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; on considère les points :  $A(2, 3, 3)$  ;  $B(3, 1, 2)$  ;  $C(2, -1, 0)$  et  $D(12, 18, -17)$

- 1) Vérifier que les points  $A$  ;  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés
- 2) Démontrer que  $A$  est le projeté orthogonal du point  $D$  sur le plan  $(ABC)$ .
- 3) Calculer de deux façons différentes la distance du point  $D$  au plan  $(ABC)$

### 5 Equation cartésienne d'une sphère

1) Déterminer une équation cartésienne de la sphère  $(S)$  de diamètre  $[AB]$  avec  $A(-1, 0, 0)$  et  $A(0, 0, 1)$

2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(4, 1, 2)$  et qui passe par le point  $A(-1, 1, 2)$  puis donner une équation du plan tangent en  $A$  à cette sphère.

## 6 Ensemble des points

Déterminer l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace pour chacun des cas suivants

- 1)  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$
- 2)  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x + 28y - 48z + 204 = 0$
- 3)  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 18z + 97 = 0$
- 4)  $x^2 - y^2 + z^2 + 2xz = 0$

## 7 Positions relatives d'un plan et d'une sphère ; d'une droite et d'une sphère

- 1) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère  $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 14z + 25 = 0$   
b) Déterminer la position relative du plan  $(\mathcal{P}) : x + y + z - 7 = 0$  par rapport à la sphère  $(S)$

- 2) Déterminer la position relative de la droite  $(D)$  par rapport à la sphère  $(S)$  dans chacun des cas suivants :

- a)  $\left\{ \begin{array}{l} (S) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25 \\ (D) = (AB) \\ \text{où } A(3, 4, 12) \text{ et } B(6, 8, 0) \end{array} \right.$
- b)  $\left\{ \begin{array}{l} (S) \text{ de rayon } 6 \text{ de centre } O(0, 0, 0) \\ (D) = (AB) \\ \text{où } A(3, 0, -1); \text{ et } B(4, 4, 2) \end{array} \right.$

- 3) Dans l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; on considère les points :  $A(-2, 0, 1)$ ;  $B(1, 2, -1)$  et  $C(-2, 2, 2)$

- a) Vérifier que les points  $A$ ;  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés
- b) Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$
- c) Montrer que les plans  $(\mathcal{P}_1) : x + y - 3z + 3 = 0$  et  $(\mathcal{P}_2) : x - 2y + 6z = 0$  sont sécants suivant la droite  $(D)$  dont une représentation paramétrique est  $\left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ y = t \end{array} \right., (t \in \mathbb{R})$

- d) Montrer que la droite  $(D)$  et le plan  $(ABC)$  sont sécants suivant et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

- e) Soit  $S$  la sphère de centre  $\Omega(1; -3; 1)$  et de rayon  $r = 3$

- i) Étudier l'intersection de la sphère  $S$  et de la droite  $(D)$

- ii) Démontrer que le plan  $(ABC)$  est tangent à la sphère  $S$

## 8 Plan médiateur

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace.  $I$  milieu de  $[AB]$ . On note  $F$  l'ensemble des points  $M$  de l'espace qui sont équidistants de  $A$  et  $B$ .

- 1) Montrer que  $M \in F \iff \vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0$
- 2) En déduire que  $F$  est un plan dont on donnera un point et un vecteur normal. (ce plan s'appelle le plan médiateur du segment  $[AB]$ )
- 3) Application : donner une équation cartésienne du plan médiateur de  $[AB]$  avec  $A(1, -1, 2)$  et  $B(0, -1, 3)$

## 9 Applications à la résolution de problèmes géométriques

Dans l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; on considère les points :  $A(-2, 0, 1)$ ;  $B(1, 2, -1)$  et  $C(-2, 2, 2)$

- 1) Vérifier que les points  $A$ ;  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés
- 2) Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$

- 3) Montrer que les plans  $(\mathcal{P}_1) : x + y - 3z + 3 = 0$  et  $(\mathcal{P}_2) : x - 2y + 6z = 0$  sont sécants suivant la droite  $(D)$  dont une représentation paramétrique est  $\left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ y = t \end{array} \right., (t \in \mathbb{R})$

- 4) Montrer que la droite  $(D)$  et le plan  $(ABC)$  sont sécants suivant et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

- 5) Soit  $S$  la sphère de centre  $\Omega(1; -3; 1)$  et de rayon  $r = 3$

- a) Étudier l'intersection de la sphère  $S$  et de la droite  $(D)$

- b) Démontrer que le plan  $(ABC)$  est tangent à la sphère  $S$



# SÉRIES D'EXERCICES N°12

## GÉOMÉTRIE 3D (PRODUIT SCALAIRE ET PRODUIT VECTORIEL)

### 1 (Exo 1 Session normale 2025)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(0, 0, 2)$ ,  $B(2, 0, 0)$  et la sphère  $(S)$  de centre  $O$  et de rayon  $R = 2$ .

1)a) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère  $(S)$ .

b) Vérifier que les points  $A$  et  $B$  appartiennent à la sphère  $(S)$ .

2) Soit  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ .

a) Déterminer l'intersection du plan  $(OAB)$  avec la sphère  $(S)$ .

b) Vérifier que  $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = 0$  puis montrer que  $d(O, (AB)) = \sqrt{2}$ .

3) On considère un point  $M(0, m, 0)$  de l'espace, où  $m \in \mathbb{R}$ .

a) Vérifier que  $\vec{AB} \wedge \vec{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}$ .

b) Dédire que  $mx + 2y + mz - 2m = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABM)$ .

c) Montrer que  $d(O, (ABM)) = \frac{2|m|}{\sqrt{4 + 2m^2}}$ .

4) Le plan  $(ABM)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(\Gamma_m)$  de rayon  $r$ . Montrer que

$$r = \sqrt{2 + \frac{4}{2 + m^2}} \text{ et déduire que } \sqrt{2} < r \leq 2, \text{ pour tout } m \in \mathbb{R}.$$

### 2 (Exo 2 Session rattrapage 2025)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(0, 3, 3)$ ,  $B(1, 2, 1)$ ,  $C(2, 3, 1)$  et le vecteur  $\vec{n}(1, -1, 1)$ . Soit  $(P)$  le plan d'équation  $x - y + z - 6 = 0$

1)a) Montrer que  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{n}$  et déduire que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont non alignés.

b) Montrer que les plans  $(ABC)$  et  $(P)$  sont parallèles.

2) Soit  $(S)$  la sphère telle que : le plan  $(ABC)$  est tangent à  $(S)$  en  $A$  et le plan  $(P)$  est tangent à  $(S)$  en un point  $H$

a) Calculer la distance du point  $A$  au plan  $(P)$  et déduire que le rayon de la sphère  $(S)$  est  $\sqrt{3}$

b) Donner une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par  $A$  et orthogonale au plan  $(P)$

c) Montrer que les coordonnées du point  $H$  sont  $(2, 1, 5)$ .

d) Montrer que  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 18 = 0$

est une équation cartésienne de la sphère  $(S)$

3) Déterminer les deux points d'intersection de la droite  $(BH)$  et la sphère  $(S)$

### 3 (Exo 2 Session de normale 2024)

Dans l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; on considère les deux points :  $A(-1, 0, -1)$  et  $B(1, 2, -1)$ , le plan  $(P)$  passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}(2, -2, 1)$  et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(2, -1, 0)$  et de rayon 5

1) Montrer que  $2x - 2y + z + 3 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(P)$

2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère  $(S)$ .

3)a) Vérifier que la distance du point  $\Omega$  au plan  $(P)$  est  $d(\Omega, (P)) = 3$

b) En déduire que le plan  $(P)$  coupe la sphère  $(S)$  selon un cercle  $(\Gamma)$  de rayon à déterminer

4)a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $\Omega$  et perpendiculaire au plan  $(P)$

b) Montrer que le point  $H(0, 1, -1)$  est le centre du cercle  $(\Gamma)$

c) Montrer que la droite  $(\Delta)$  est la médiatrice du segment  $[AB]$

### 4 (Exo 1 Session rattrapage 2024)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux points  $A(1, 1, 0)$  et  $\Omega(-1, 1, -2)$  et le plan  $(P)$  d'équation  $x + z - 1 = 0$

1)a) Vérifier que  $A$  est un point du plan  $(P)$  et donner un vecteur normal de  $(P)$ .

b) Montrer que la droite  $(\Omega A)$  est perpendiculaire au plan  $(P)$ .

2) Soit  $(S)$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace vérifiant :  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0$

a) Montrer que  $(S)$  est une sphère de centre  $\Omega$  et déterminer son rayon.

b) Montrer que  $(P)$  coupe  $(S)$  suivant un cercle de centre  $A$  puis déterminer son rayon.

3) Soit  $(Q_m)$  un plan d'équation  $x + y + mz - 2 = 0$ , où  $m$  est un nombre réel.

a) Vérifier que  $A$  est un point du plan  $(Q_m)$ , pour tout  $m$  de  $\mathbb{R}$

b) Déterminer la valeur du réel  $m$  pour que  $(Q_m)$  soit perpendiculaire au plan  $(P)$

c) Existe-t-il un plan  $(Q_m)$  qui coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle de centre  $A$ ? Justifier.

**5 (Exo 1 Session de normale 2023)**

Dans l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; on considère les points :  $A(0, 1, 4)$ ;  $B(2, 1, 2)$  et  $C(2, 5, 0)$  et  $\Omega(3, 4, 4)$

1)a) Montrer que  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

b) En déduire l'aire du triangle  $ABC$  et la distance  $d(B, (AC))$

2) Soit  $D$  le milieu du segment  $[AC]$

a) Vérifier que  $\vec{D\Omega} = \frac{1}{4}(\vec{AB} \wedge \vec{AC})$

b) En déduire  $d(\Omega, (ABC)) = 3$

3) Soit  $(S)$  la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$$

a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère  $(S)$

b) Montrer que le plan  $(ABC)$  est tangent à la sphère  $(S)$  en un point que l'on déterminera

4) Soient  $Q_1$  et  $Q_2$  les deux plans parallèles à  $(ABC)$  tels que chacun d'eux coupe  $(S)$  suivant un cercle de rayon  $\sqrt{5}$

Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans  $Q_1$  et  $Q_2$

**6 (Exo 2 Session rattrapage 2023)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(2, 1, 2)$ ;  $B(-2, 0, 5)$ ;  $C(4, -5, 7)$  et  $\Omega(1, -1, 0)$ .

On pose  $\vec{u} = \vec{\Omega A}$  Soit  $(S)$  la sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R = 3$

1)a) Montrer que  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 13\vec{u}$  et déduire que les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

b) Vérifier que  $x + 2y + 2z - 8 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$

c) Montrer que le plan  $(ABC)$  est tangent à la sphère  $(S)$  au point  $A$

2) Soient  $(P)$  le plan d'équation cartésienne  $3x + 4y + z + 1 = 0$  et  $(\Delta)$  la droite passant par le point  $A$  et orthogonale au plan  $(P)$

a) Montrer que la droite  $(\Delta)$  coupe le plan  $(P)$  au point  $H\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$

b) Déterminer les coordonnées du point  $D$  tel que le point  $H$  soit milieu du segment  $[AD]$

3) Soit  $(Q)$  le plan passant par le point  $D$  et de vecteur normal  $\vec{\Omega D}$

a) Montrer que le plan  $(Q)$  est tangent à la sphère  $(S)$  en  $D$

b) Montrer que les plans  $(Q)$  et  $(ABC)$  se coupent suivant la droite  $(BC)$

**7 (Exo 1 Session de normale 2022)**

Dans l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère

orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; on considère les points :  $A(0, 1, 1)$ ;  $B(1, 2, 0)$  et  $C(-1, 1, 2)$ .

1)a) Montrer que  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{k}$  item En déduire que  $x + z - 1 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$

2) Soit  $(S)$  est la sphère de centre  $\Omega(1, 1, 2)$  et de rayon  $R = \sqrt{2}$

Déterminer une équation cartésienne de la sphère  $(S)$ .

3) Montrer que le plan  $(ABC)$  est tangent à la sphère  $(S)$  au point  $A$

4) On considère la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $C$  et perpendiculaire au plan  $(ABC)$

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$

b) Montrer que la droite  $(\Delta)$  est tangente à la sphère  $(S)$  en un point  $D$  dont on déterminera les coordonnées

c) Calculer le produit scalaire  $\vec{AC} \cdot (\vec{i} + \vec{k})$ , puis en déduire la distance  $d(A, (\Delta))$

**8 (Exo 2 Session rattrapage 2022)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux points  $A(1, -1, 1)$  et  $B(5, 1, -3)$ . Soit  $(S)$  la sphère de centre  $\Omega(3, 0, -1)$  et de rayon  $R = 3$ , et  $(\Delta)$  la droite passant par le point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(2, -2, 1)$

1)a) Calculer la distance  $\Omega A$

b) Montrer que les droites  $(\Delta)$  et  $(\Omega A)$  sont perpendiculaires.

c) Déduire la position relative de la droite  $(\Delta)$  et la sphère  $(S)$

2) Soit le point  $M_a(2a - 3, 3 - 2a, a - 1)$  où  $a \in \mathbb{R}$ , montrer que  $\vec{AM}_a = (a - 2)\vec{u}$  et déduire que  $M_a \in (\Delta)$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$

3)a) Vérifier que  $2x - 2y + z - 9a + 13 = 0$  est une équation du plan  $(P_a)$  passant par  $M_a$  et perpendiculaire à la droite  $(\Delta)$

b) Montrer que  $d(\Omega, (P_a)) = |3a - 6|$

c) Déterminer les deux valeurs de  $a$  pour lesquelles le plan  $(P_a)$  est tangent à la sphère  $(S)$ .

**9 (Exo 1 Session normale 2019)**

Dans l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; on considère les points :  $A(1, -1, -1)$ ;  $B(0, -2, 1)$  et  $C(1, -2, 0)$ .

1)a) Vérifier que  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

b) En déduire que  $x + y + z + 1 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$

2) Soit  $(S)$  la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$$

. Montrer que le centre de la sphère  $(S)$  est  $\Omega(2, -1, 1)$  et que son rayon est  $R = \sqrt{5}$

3)a) Calculer  $d(\Omega, (ABC))$  la distance du point  $\Omega$  au plan  $(ABC)$

b) En déduire que le plan  $(ABC)$  coupe la sphère  $(S)$  selon un cercle  $(\Gamma)$  (la détermination du centre et du rayon de  $(\Gamma)$  n'est pas demandée)

**10 (Exo 1 Session rattrapage 2019)**

Dans l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; on considère les points :  $A(1, 2, 2)$ ;  $B(3, -1, 6)$  et  $C(1, 1, 3)$ .

1)a) Vérifier que  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

b) En déduire que  $x - 2y - 2z + 7 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$

2) Soient les points  $E(5, 1, 4)$  et  $F(-1, 1, 12)$  et  $(S)$  l'ensemble des points  $M$  vérifiant  $\vec{ME} \cdot \vec{MF} = 0$ . Montrer que  $(S)$  est la sphère de centre  $\Omega(2, 1, 8)$  et de rayon  $R = 5$

3)a) Calculer  $d(\Omega, (ABC))$  la distance du point  $\Omega$  au plan  $(ABC)$

b) En déduire que le plan  $(ABC)$  coupe la sphère  $(S)$  selon un cercle  $(\Gamma)$  de rayon  $r = 4$

**11 (Exo 1 Session normale 2018)**

Dans l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; on considère les points :  $A(0, -2, -2)$ ;  $B(1, -2, -4)$  et  $C(-3, -1, 2)$ .

1) Montrer que  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  et en déduire que  $2x + 2y + z + 6 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$

2) On considère la sphère  $(S)$  dont une équation est  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$ . Vérifier que le centre de la sphère  $(S)$  est  $\Omega(1, 0, 1)$  et que son rayon est  $R = 5$

3)a) Vérifier que  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$  est

une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $\Omega$  et orthogonale au plan  $(ABC)$

b) Déterminer les coordonnées de  $H$  point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et du plan  $(ABC)$

4) Vérifier que  $d(\Omega, (ABC)) = 3$ , puis montrer que le plan  $(ABC)$  coupe la sphère  $(S)$  selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.

**12 (Exo 1 Session rattrapage 2018)**

Dans l'espace  $(\mathcal{E})$  rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; on considère la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(2, 1, 2)$  et de rayon 3 et le plan  $(P)$  passant par le point  $A(-1, 0, 3)$  et dont  $\vec{u}(4, 0, -3)$  est un vecteur normal.

1) Montrer qu'une équation de  $(S)$  est  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z = 0$ .

2) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan  $(P)$  est  $4x - 3z + 13 = 0$

3)a) Vérifier que  $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$  est

une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $\Omega$  et orthogonale au plan  $(P)$

b) Déterminer les coordonnées de  $H$  point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et du plan  $(P)$

4)a) Calculer  $d(\Omega, (P))$

b) Montrer que le plan  $(P)$  est tangent à la sphère  $(S)$  en un point que l'on déterminera

**13 (Exo 1 Session normale 2017)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan  $(P)$  passant par le point  $A(0, 1, 1)$  et dont  $\vec{u}(1, 0, -1)$  est un vecteur normal et la sphère  $(S)$  de centre le point  $\Omega(0, 1, -1)$  et de rayon  $\sqrt{2}$

1)a) Montrer que  $x - z + 1 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(P)$

b) Montrer que le plan  $(P)$  est tangent à la sphère  $(S)$  et vérifier que  $B(-1, 1, 0)$  est le point de contact.

2)a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $A$  et orthogonale au plan  $(P)$

b) Montrer que la droite  $(\Delta)$  est tangente à la sphère  $(S)$  au point  $C(1, 1, 0)$

3) Montrer que  $\vec{OC} \wedge \vec{OB} = 2\vec{k}$  et en déduire l'aire du triangle  $OCB$

**14 (Exo 1 Session rattrapage 2017)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère la sphère  $(S)$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$  et le plan  $(P)$  d'équation  $y - z = 0$ .

1)a) Montrer que la sphère  $(S)$  a pour centre le point  $\Omega(1, 1, 1)$  et pour rayon 2

b) Calculer  $d(\Omega, (P))$  et en déduire que le plan  $(P)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(C)$

c) Déterminer le centre et le rayon du cercle  $(C)$

2) Soit  $(\Delta)$  la droite passant par le point  $A(1, -2, 2)$  et orthogonale au plan  $(P)$ .

a) Montrer que  $\vec{u}(0, 1, -1)$  est un vecteur directeur de la droite  $(\Delta)$

b) Montrer que  $\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\|$  et en déduire que la droite  $(\Delta)$  coupe la sphère  $(S)$  en deux points.

c) Déterminer les coordonnées de chaque point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et de la sphère  $(S)$



# SÉRIES D'EXERCICES N°13

## DÉNOMBREMENT

### 1 Principe fondamental du dénombrement

- 1) Combien de nombre pairs de trois chiffres peut on former avec les chiffres 0 ; 1 et 2 ?
- 2) Quel est le nombre de numéros de téléphone portable commençant par 0661 ?
- 3) On lance quatre fois de suite un dé cubique. On note chaque fois le numéro de la face supérieure dans l'ordre.
  - a) Combien y a-t-il de résultats possibles ?
  - b) Combien peut-on obtenir de résultats où tous les numéros obtenus sont supérieurs ou égaux à cinq ?
  - c) Combien peut-on obtenir de résultats où tous les numéros obtenus sont égaux ?
  - d) Combien peut-on obtenir de résultats où ne figure pas le numéro 6 ?
  - e) Combien peut-on obtenir de résultats où figure au moins une fois le numéro 6 ?

### 2 Arrangement - Permutation et Combinaison

- 1) Le code confidentiel d'une carte bancaire est un nombre constitué de 4 chiffres.
  - a) Quel est le nombre de codes possibles ?
  - b) Combien y a-t-il de codes où tous les chiffres sont différents ?
  - c) Quel est le nombre de codes commençant par 0 ?
  - d) Combien y a-t-il de codes ne contenant que des nombres premiers ?
- 2) Une classe de 26 élèves : 14 filles et 12 garçons doit élire un comité composé d'un président ; un vice-président et un secrétaire
  - a) Combien de comité peut on constitué ?

- b) Combien de comité peut on constitué sachant que le poste de secrétaire doit être occupé par une fille ?
  - c) Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est un garçon et le secrétaire une fille ?
  - d) Quel est nombre de comités pour lesquels le président et le vice-président sont de sexes différents ?
- 3) On constitue un comité de 8 personnes choisies parmi 15 femmes et 12 hommes.
    - a) Combien y a-t-il de comités possibles ?
    - b) Combien de comité peut on constitué sachant que le comité contient 4 hommes et 4 femmes ?
    - c) Combien de comité peut on constitué sachant que le comité contient au moins 2 femmes ?

### 3 Tirages

Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires

- 1) On tire simultanément 2 de cette urne
  - a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
  - b) Dénombrer l'ensemble des tirages contenant :
    - i) deux boules de même couleur
    - ii) « Tirer deux boules de même couleur »
    - iii) « Tirer deux boules de couleurs différentes » .
- 2) Mêmes questions si l'on effectue des tirages successives et avec remise
- 3) Mêmes questions si l'on effectue des tirages successives et sans

# SÉRIES D'EXERCICES N°14

## CALCUL DE PROBABILITÉS

### 1 Exo N°3 Session-N 2025

Une urne contient six boules indiscernables au toucher :

Quatre boules blanches numérotées : 0 ; 1 ; 1 ; 1 et deux boules noires numérotées : 0 ; 1

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

On considère les évènements suivants :

$A$  « Les deux boules tirées portent le numéro 1 »

$B$  « Les deux boules tirées sont de même couleur »

1)a) Montrer que  $p(A) = \frac{2}{5}$

b) Montrer que  $p(B) = \frac{7}{15}$

c) Les évènements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ? justifier.

2) On répète l'expérience précédente trois fois successives. On considère la variable aléatoire  $X$  indiquant le nombre de fois que l'on réalise l'évènement  $A$ .

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, représentant la loi de probabilités de  $X$

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{27}{125}$			

b) Calculer l'espérance  $E(X)$  de la variable aléatoire  $X$

### 2 Exo N°4 Session-R 2025

Un sac contient 4 boules blanches et 3 boules noires. (Les boules sont indiscernables au toucher).

Un jeu consiste à tirer successivement et sans remise deux boules du sac.

Les règles du jeu sont comme suit :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on note : +5.
- Si les deux boules tirées sont noires, on note : -5.
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, on note : 0.

On considère les évènements :  $G$  « noter +5 » ;  $Z$  « noter 0 »

$N_1$  « La première boule tirée est noire » ;  $B_2$  « la deuxième boule tirée est blanche »

1)a) Calculer  $p(G)$ , la probabilité de l'évènement  $G$

b) Montrer que la probabilité de l'évènement  $Z$  est  $p(Z) = \frac{4}{7}$

2)a) Calculer la probabilité  $p(N_1 \cap B_2)$

b) Montrer que  $p(B_2) = \frac{4}{7}$

c) Déduire la probabilité de « noter 0 » sachant que la deuxième boule tirée est blanche.

### 3 Exo N°4 Session-N 2024

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

1) Montrer que  $p(A) = \frac{1}{3}$ , où  $A$  est l'évènement "les deux boules tirées portent le même numéro"

2) Montrer que  $p(B) = \frac{5}{21}$  où  $B$  est l'évènement "La somme des numéros des boules tirées est 4"

3) Calculer  $p(A \cap B)$

4) Les évènements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ? Justifier.

### 4 Exo N°3 Session-R 2024

Une urne contient huit boules : quatre boules blanches, trois boules noires et une boule verte. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

1) Vérifier que le nombre de tirages possibles est égale à 336.

2) Calculer la probabilité de l'évènement  $A$  : "Tirer trois boules blanches"

3) Montrer que la probabilité de l'évènement  $B$  : "Tirer trois boules de même couleur" est  $p(B) = \frac{5}{56}$

4) Calculer la probabilité de l'évènement  $C$  : "Obtenir au moins deux couleurs différents"

### 5 Exo N°3 Session-N 2023

Une urne  $U_1$  contient six boules portant les numéros 0; 0; 1; 1; 1; 2 et une urne  $U_2$  contient cinq boules portant les numéros 1; 1; 1; 2; 2. On suppose que les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On tire une boule de l'urne  $U_1$  et on note le nombre  $a$  qu'elle porte, puis on la met dans l'urne  $U_2$ , ensuite on tire une boule de l'urne  $U_2$  et on note le nombre  $b$  qu'elle porte »

On considère les évènements suivants :

(A) : « La boule tirée de l'urne  $U_1$  porte le nombre 1 »

(B): « Le produit  $ab$  est égal à 2 »

- 1) a) Calculer  $p(A)$  : la probabilité de l'événement  $A$   
b) Montrer que  $p(B) = \frac{1}{4}$  (On peut utiliser l'arbre des possibilités)
- 2) Calculer  $p(A/B)$  : la probabilité de l'événement  $A$  sachant que l'événement  $B$  est réalisé.
- 3) Soit  $X$  la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit  $ab$ 
  - a) Montrer que  $p(X = 0) = \frac{1}{3}$
  - b) Donner la loi de probabilité de  $X$  (Remarque que les valeurs prises par  $X$  sont 0 ; 1 ; 2 et 4)
  - c) On considère les événements suivants :  
(M): « Le produit  $ab$  est pair non nul »  
(N): « Le produit  $ab$  est égal à 1 »  
Montrer que les événements  $M$  et  $N$  sont équiprobables

**6** Exo N°4 Session-R 2023

Une urne contient quatre boules blanches et deux boules noires, indiscernables au toucher.

- 1) On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.
  - a) Calculer la probabilité de l'événement (A) : "tirer au moins une boule noire"
  - b) Soit l'événement (B) : "Obtenir deux boules de même couleur". Montrer que  $p(B) = \frac{7}{15}$
  - c) On répète cette expérience cinq fois en remettant dans l'urne les boules tirées, après chaque tirage. Quelle est la probabilité pour que l'événement  $B$  soit réalisé exactement trois fois.
- 2) Dans cette question, on tire des boules de l'urne, une après l'autre et sans remise et on arrête le tirage lorsqu'on obtient une boule blanche pour la première fois. Soit  $X$  la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages effectués dans cette expérience.
  - a) Justifier que les valeurs prises par  $X$  sont : 1 ; 2 et 3
  - b) Montrer que  $p(X = 2) = \frac{4}{15}$
  - c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$
  - d) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?

**7** Exo N°3 Session-N 2022

Une urne contient : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

- 1) Montrer que  $P(A) = \frac{1}{6}$ ; où  $A$  est l'événement "N'obtenir aucune boule rouge"
- 2) Calculer  $P(B)$ ; où  $B$  est l'événement

"Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes"

- 3) Montrer que  $P(C) = \frac{1}{2}$ ; où  $C$  est l'événement "obtenir exactement une boule rouge"
- 4) Calculer  $P(D)$ ; où  $D$  est l'événement "Obtenir au moins deux boules rouges"

**8** Exo N°3 Session-R 2022

Une urne contient trois boules blanches, quatre boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

- 1) On considère les événements suivants :  
(A): " Obtenir exactement deux boules rouges"  
(B): " Obtenir exactement une boule verte "
  - a) Montrer que  $P(A) = \frac{12}{55}$  et  $P(B) = \frac{21}{44}$
  - b) Calculer  $p(A/B)$  : la probabilité de l'événement  $A$  sachant que l'événement  $B$  est réalisé. les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

- 2) Soit la variable aléatoire  $X$  qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées
  - a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$
  - b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes

**9** Exo N°3 Session-N 2019

Une urne contient dix boules : trois boules vertes, six boules rouges et une boule noire indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. on considère les événements suivants :

- (A) Obtenir trois boules vertes
- (B) Obtenir trois boules de même couleur.
- (C) Obtenir au moins deux boules de même couleur.

- 1) Montrer que  $P(A) = \frac{1}{120}$  et que  $P(B) = \frac{7}{40}$
- 2) Calculer  $P(C)$

**10** Exo N°3 Session-R 2019

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne. Soient les événements suivants :

- (A) les trois boules tirées sont de même couleur
- (B) Il n'y a aucune boule blanche parmi les boules tirées
- (C) Il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées

- 1) Montrer que  $P(A) = \frac{1}{6}$  et que  $P(B) = \frac{8}{27}$
- 2) Calculer  $P(C)$