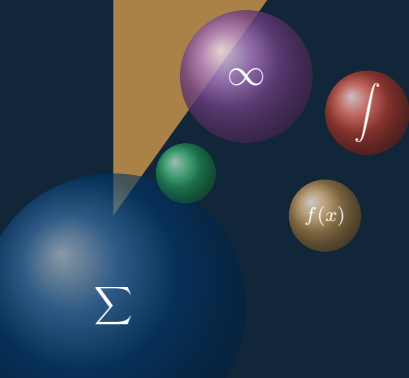


MATHÉMATIQUES

Recueil d'Exercices Thématiques

Secondaire qualifiant

1^{re} Bac Sciences Mathématiques



SÉRIES D'EXERCICES N°1

NOTIONS DE LOGIQUE

1 Proposition-Fonction propositionnelles

- 1) a) Donner un exemple de proposition vraie
b) Donner un exemple de proposition fausse
- 2) Déterminer pour chaque cas S l'ensemble des nombres réels pour lesquels la fonction propositionnelle est vraie
 - a) $\ll x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 12 < 0 \gg$
 - b) $\ll x \in [0; \pi] : \sin(x) \times \cos(x) \leq 0 \gg$
 - c) $\ll (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}, \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(x + y) \gg$
 - d) $\ll (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 0 \gg$

2 Quantificateurs

- 1) Traduire en terme de quantificateurs les propositions suivantes :
 - a) Tout nombre entier naturel est un entier relatif;
 - b) Il existe un nombre réel qui n'est pas rationnel;
 - c) il existe un réel dont le carré est strictement supérieur à 1;
 - d) le carré de tout nombre réel est un nombre positif;
 - e) la somme de deux réels positifs est un nombre positif;
 - f) l'équation $x^2 - 1 = 0$ une solution unique dans $\mathbb{N}$;
 - g) Tout nombre réel non nul admet un inverse;
 - h) Tout nombre entier relatif admet un opposé;
- 2) soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, écrire en utilisant les quantificateurs logiques les propositions suivantes :
 - a) la fonction f s'annule
 - b) la fonction f est majorée
 - c) la fonction f est constante
 - d) la fonction f n'est pas constante
 - e) la fonction f croissante
- 3) En justifiant votre réponse, dire si chaque proposition est vraie ou fausse :
 - a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
 - b) $\exists x \in \mathbb{R}, \sin x = x$
 - c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : x \leq y$
 - d) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x \leq y$
 - e) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 y^2 \geq xy$

- f) $\exists x \in \mathbb{Z}^*, \forall y \in \mathbb{Z}^* : x \times y \neq 1$
- g) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x \leq y$
- h) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : x \leq y$
- i) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$
- j) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$

3 Négation d'une proposition

- 1) Ecrire la négation des phrases suivantes :
 - a) Tous les élèves sont présents;
 - b) Dans cette classe aucun élève n'est bavard
 - c) Dans chaque classe, il existe ou moins un élève bavard
 - d) J'ai compris toutes les étapes de la démonstration;
 - e) Certains triangles sont isocèles.
 - f) dans chaque classe, tous les élèves sont attentifs;
- 2) Ecrire avec les quantificateurs les propositions suivantes :
 - a) l'équation $x^2 + x + 1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$
 - b) Il n'existe pas d'entier naturel supérieur ou égal à tous les autres

4 Raisonnement par contre exemple

en utilisant le raisonnement par contre exemple, montrer que les propositions suivantes sont fausses :

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x$
- 3) $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 > x$
- 4) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n + 3^n = 5^n$
- 5) $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x^2 + 1} < 1$
- 6) $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- 7) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = x$
- 8) $\forall x \in \mathbb{R} : (x - 3)^2 = x^2 - 9$
- 9) $\forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \sqrt{x} \geq 2$
- 10) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 2x - y \neq 5$
- 11) $(\forall x \in]0; 1[), \frac{2x}{x^2(1 - x^2)} < 1$

5 Conjonction et disjonction

- 1) soit x un réel. traduire les propositions

suivantes en utilisant la conjonction ou la disjonction

- a) $-1 < x < 1$
- b) $|x| \geq 3$
- c) $|x| = 7$
- d) $x \geq 5$

2) soit p une proposition .

- a) Montrer que $(p \wedge \bar{p})$ est fausse
- b) Montrer que $(p \vee \bar{p})$ est vraie

3) On considère les deux équations $(E) : x^2 + ax + b = 0$ et $(F) : x^2 + bx + a = 0$ où a et b sont deux réels de l'intervalle $]4, +\infty[$ et dont les discriminants sont respectivement (Δ_1) et (Δ_2) .

Montrer que la proposition $p \vee q$ est vraie où $(p) : \Delta_1 \geq 0$ et $(q) : \Delta_2 \geq 0$

6 Implication logique

1) Montrer que l'implication $1 = 2 \implies 1 = 3$ est vraie.

2) Ecrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs et les connecteurs logiques :

a) si la somme de deux nombres réels est strictement négatif, alors l'un des deux nombres est strictement négatif .

b) Pour qu'un entier naturel soit supérieur ou égal à 2 , il suffit qu'il soit strictement supérieur à 1 .

c) Pour qu'un entier naturel soit strictement supérieur à 1, il faut qu'il soit différent de 0 .

d) Une condition suffisante pour qu'un réel soit entier relatif est qu'il soit entier naturel.

3) soient x et y deux réels quelconques . complétez par $\implies$ ou par $\Leftarrow$

- a) $x = 2 \dots\dots\dots x^2 = 4$
- b) $x = 2 \dots\dots\dots \sqrt{x^2} = 2$
- c) $xy > 0 \dots\dots\dots (x > 0) \wedge (y > 0)$
- d) $x = y \dots\dots\dots (x = 0) \wedge (y = 0)$
- e) $x \leq y \dots\dots\dots x < y$
- f) $x = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots \cos(x) = \frac{1}{2}$
- g) $\sin(x) \geq 0 \dots\dots\dots x \in [0, \pi]$

4) soit $x \in \mathbb{R}$

- a) Montrer que $-1 \leq x \leq 3 \implies |-x+4| - |x-5| = -1$
- b) Montrer que $x^2 \leq x \implies |x| = x$
- c) Montrer que $0 \leq x \leq 2 \implies -x^3 + 4x + 1 > 1$

7 Raisonnement déductif

1)a) en utilisant le raisonnement déductif montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{+2} : a+b \geq 2\sqrt{ab}$

b) En déduire que

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^{+3} (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

2) en utilisant le raisonnement déductif montrer que : $\forall x \in (\mathbb{R}^*)^+ : \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$

3) a et b sont deux réels tels que $a + b = 1$. montrer que $ab \leq \frac{1}{4}$

4) a et b sont deux réels tels que $a - b = 1$. montrer que $ab \geq -\frac{1}{4}$

5) a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Montrer que $|a + b| \leq \sqrt{2}$

6) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*2} :$
 $2x + 4y = 1 \implies \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 20$

7) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 :$
 $(|x| < 1) \wedge (|y| < 1) \implies |x + y| < |1 + xy|$

8 Equivalence logique

1) Compléter les pointillés par l'un des connecteurs logique "et" ou bien par "ou"

a) $(\exists x \in \mathbb{R} , ax + b = 0)$

$$\iff (a \neq 0) \dots\dots [(a = 0) \dots\dots (b = 0)]$$

b) $(\forall x \in \mathbb{R} , ax + b = 0)$

$$\iff (a = 0) \dots\dots (b = 0)$$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} , (2n - n^2 = 1 \iff n = 1)$

3) Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{+2} ,$

$$[a + b = 0 \iff (a = 0) \wedge (b = 0)]$$

4) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ,$

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \iff (x=2) \wedge (y=8)$$

9 Raisonnement par équivalence successives

1) Résoudre dans $\mathbb{R} :$

a) $\sqrt{x+7} = 5 - x$

b) $\sqrt{x-1} = 1 - x$

c) $\sqrt{x+6} = x$

d) $\sqrt{x} = x - 2$

e) $\sqrt{x+7} = 5 - x$

2) En utilisant le raisonnement par équivalence successives montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+} , \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2)$$

3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(x \neq \sqrt{3}) \wedge (x \neq -\sqrt{3}) \iff \frac{2}{1+x^2} \neq 1$$

10 Les Lois logiques

1) Soient p et q et r trois propositions.

a) Donner la négation des propositions suivantes ;

i) $0 < x \leq y$

ii) $\bar{p} \vee q$

iii) $p \Rightarrow \bar{q}$

iv) $p \implies q$

2) En utilisant le raisonnement par équivalences, montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

a) $p \Rightarrow (p \vee q)$

b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

d) $p \Rightarrow (\bar{p} \Rightarrow q)$

e) $(p \wedge q) \implies (p \vee q)$

3) Montrer que : $(p \vee (\bar{p} \wedge q)) \iff (\bar{p} \wedge \bar{q})$

11 Raisonnement par l'absurde

1) En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que les propositions suivantes sont vraies :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -2 \implies \frac{x+1}{x+2} \neq 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}^* : \sqrt{1+x^2} \neq 1 + \frac{x^2}{2}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$

d) i) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}$

ii) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

2) On considère les deux fonctions f et g définies comme suit :

$f(x) = x + 2$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$.

Montrer que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas $\mathcal{C}_g$

12 Raisonnement par contraposée

1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

a) $x \neq y \implies \frac{x}{1+y} \neq \frac{y}{1+x}$

b) $x \neq y \implies x^3 + x \neq y^3 + y$

c) $x \neq y \implies (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

2) soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que :

a) $n \text{ premier} \implies (n=2) \text{ ou } (n \text{ impair})$

b) $5 \nmid xy \implies (5 \nmid x) \wedge (5 \nmid y)$

13 Raisonnement par disjonction des cas

1) En utilisant le raisonnement par disjonction des cas Montrer que les propositions suivantes sont vraies :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq x^2 - x + 1$

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(x, y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$
avec $\max(x, y)$ est le plus grand des deux nombres x et y

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \max(x^2, (x-2)^2) \geq 1$

2) Résoudre $\mathbb{R}$ les deux équations :

a) $3|x-1| + x - 5 = 0$

b) $|x-1| + |x| = 2$

3) Résoudre $\mathbb{R}$ les deux inéquations :

a) $|x+1| < 4$

b) $\sqrt{x+1} < x+3$

14 Raisonnement par récurrence

Montrer par récurrence ce qui suit :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n+1$

2) $\forall n \geq 6, 2^n \geq 6n+7$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2+3+4+\dots+n$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1*2+2*3+3*4+\dots+n(n+1)$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

5) pour tout entier naturel non nul n , le nombre $12^n - 5^n$ est divisible par 7

6) pour tout entier naturel non nul n , le nombre $3^n + 4^n - 1$ est divisible par 3

7) pour tout entier naturel n , le nombre $4^n + 5$ est divisible par 3

8) pour tout entier naturel n , le nombre $10^n - 1$ est divisible par 9

9) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

10) $\forall n \in \mathbb{N}^* :$

$$1+3+5+\dots+2n-1 = n^2$$

11) $\forall n \in \mathbb{N}^* : 5+8+11+\dots+5+3n =$

$$5(n+1) + 3 \frac{n(n+1)}{2}$$



SÉRIES D'EXERCICES N°2

LES ENSEMBLES

1 Description d'un ensemble

1) Ecrire en extension les ensembles suivants

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 1| \leq 3\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 10\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{5}{3} \leq x \leq \frac{27}{7}\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid ||2x - 3| - 2| - 1 = 0\}$

2) Ecrire en compréhension les ensembles suivants

a) $E_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

b) $E_2 = \{3, 9, 27, 81, \dots\}$

c) $E_3 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$

d) $E_4 = \{1, 10, 100, 1000, 10000, \dots\}$

2 Inclusion, Égalité

1) On considère les ensembles :

• $A = \{(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

• $B = \{-\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Montrer que : $A \subset B$ a-t-on $A = B$? (Justifier la réponse)

2) On définit les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

• $E = \{(t, 4t - 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

• $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$

Montrer que $E = F$.

3 Ensemble des parties

1) On pose $A = \{a\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$. Ecrire en extension :

a) $\mathcal{P}(B)$

b) $\mathcal{P}(A)$

c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$

2) Soient A et B deux parties d'un ensemble non vide E . Montrer que : $A \subset B \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

4 Union - Intersection - Complémentaire

1) On considère les ensembles :

• $E = \{-\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

• $F = \{-\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Montrer que : $E \cap F = \emptyset$

2) Soient A , B et C trois parties d'un ensemble non vide E . Montrer que : $A \cap B = \emptyset \iff A \subset \overline{B}$

3) En justifiant votre réponse, donner la valeur de vérité de chacune des deux propositions suivantes

a) $(A \cup B \subset A \cup C) \implies B \subset C$

b) $(A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C$

4) Soit E un ensemble non vide. Montrer que $\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{P}(E)^4$

• $A \cap B = \emptyset \iff A \subset \overline{B}$

• $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$

• $(A \cup B \subset A \cup C) \wedge (A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C$

5) En justifiant votre réponse, donner la valeur de vérité de chacune des deux propositions suivantes :

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$$

• $(A \cup B \subset A \cup C) \implies B \subset C$

• $(A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C$

5 Différence de deux ensembles

1) Déterminer les deux ensembles $A \setminus B$ sachant que :

$A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$ et $A \cap B = \{4, 5, 6, 11\}$ et $A \setminus B = \{7, 8, 9, 10\}$

2) Ecrire en extension $A \Delta B$ sachant que :

$A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ et $B = \{2, 7, 8, 3, 9\}$

3) Soient A et B et C des parties d'un ensemble non vide E . Montrer que :

• $A - B = \emptyset \iff A \subset B$

• $A - B = A \iff A \cap B = \emptyset$

• $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

• $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

• $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

6 Produit cartésien

1) Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{0\}$ et $G = \{a, b, c\}$. Ecrire en extension les ensembles suivants : $E \times F$ et $F \times E$ et G^2 et $E \times F \times G$ et $\mathcal{P}(F \times G)$.

2) Soit E un ensemble. A et B et C trois parties de E . Montrer que :

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

3) Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Montrer que $E \neq \emptyset$

b) Montrer que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}), E \neq A \times B$$



SÉRIES D'EXERCICES N°3

LES APPLICATIONS

1 Restriction et prolongement

on considère l'application :

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 4 - \frac{|x|}{x}$$

- 1) Donner la restriction de f à $] -\infty; 0[$
- 2) Donner deux prolongements distincts de f à $\mathbb{R}$

2 Image et image réciproque

- 1) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto f(x) = -x^2 + 2x - 3$$

En procédant par équivalences successives :

- a) Déterminer $f(\mathbb{R})$
- b) Déterminer $f^{-1}([-3; -2])$
- c) Déterminer $f^{-1}([0; 2])$
- 2) a) Donner un exemple d'application vérifiant $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f^{-1}(f(A)) \not\subset A$
- b) Donner un exemple d'application vérifiant $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et $B \not\subset f(f^{-1}(B))$

3 Injection - Surjection - Bijection

- 1) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f dans chacun des cas suivants :

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto f(x) = \sin x$$
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$
$$x \mapsto f(x) = \sin x$$
- c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
$$n \mapsto f(n) = n + 1$$
- d) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$$x \mapsto f(x, y) = (x + y, xy)$$

- 2) Soit $f: E \rightarrow E$ une application; A une partie de E ; B une partie de F

- a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Montrer qu'on a l'égalité lorsque f est injective
- b) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
Montrer qu'on a l'égalité lorsque f est surjective

4 Réciproque d'une bijection

- 1) Soit l'application :

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{4\}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{4x - 1}{x - 2}$$

Montrer que f est bijective et expliciter l'expression de la bijection réciproque de f

- 2) Soit l'application :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 7$$

- a) i) Déterminer $f(\mathbb{R})$
- ii) L'application f est-elle surjective ? (Justifier la réponse)
- b) i) Déterminer $f^{-1}(\{7\})$
- ii) L'application f est-elle injective ? (Justifier la réponse)
- c) Montrer que g la restriction de f à $I =]-\infty; 2]$ réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = [3; +\infty[$.
- d) Déterminer l'expression de la bijection réciproque g^{-1}
- 3) On considère l'application :

$$f: \left(]0; +\infty[\right)^2 \rightarrow \left(]0; +\infty[\right)^2$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right)$$

Montrer que f est bijective et déterminer la bijection réciproque de f

5 Composée de deux applications

- 1) Soit $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $F = \{0, 4, 1, 7\}$ et $G = \{2, 4, -1, 1\}$. On définit des applications $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ par

$$f(0) = 0; f(1) = 7; f(3) = 1; f(2) = 0$$

$$g(0) = 2; g(7) = -1; g(1) = 2; g(4) = 1.$$

- a) Calculer $g \circ f(x)$ pour tout $x \in E$
- b) Calculer $(g \circ f)^{-1}(\{2, 1\})$
- 2) a) Montrer que si $f \circ g$ est injective alors g est injective
- b) Trouver un exemple où $f \circ g$ est injective et f n'est pas injective.
- 3) a) Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective
- b) Trouver un exemple où $g \circ f$ est surjective et g n'est pas surjective.
- 4) Soit $f: E \rightarrow E$ une application tel que $f \circ f = Id_E$.
Montrer que f est bijective et que $f^{-1} = f$

SÉRIES D'EXERCICES N°4

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

1 Fonction majorée ; minorée ; bornée - Extrémums

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = x - 4\sqrt{x+1} + 6$

a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f

b) Montrer que : $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = x - \sqrt{4 - x^2}$

a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f

b) Justifier que si $-2 \leq x \leq 2$ alors $x + 2\sqrt{2} > 0$

c) i) Montrer que f est majorée par $2\sqrt{2}$

ii) $2\sqrt{2}$ est-il le maximum de f sur $\mathcal{D}_f$?

(justifier votre réponse)

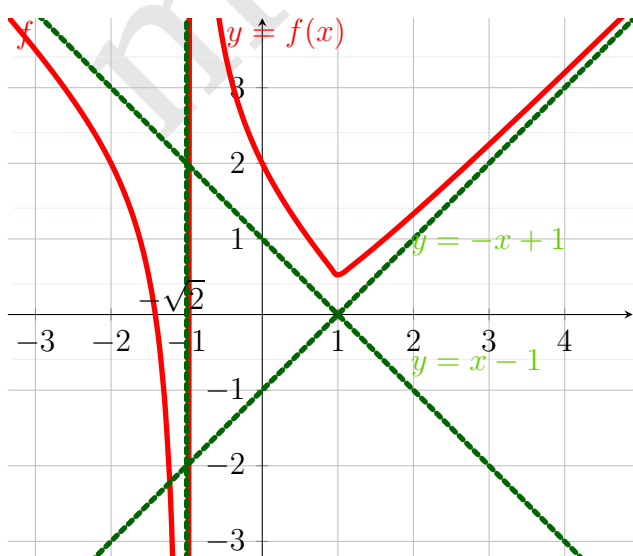
d) i) Montrer que f est minorée par $-2\sqrt{2}$

ii) $-2\sqrt{2}$ est-il le minimum de f sur $\mathcal{D}_f$?

(justifier votre réponse)

2 Comparaison , Interprétation géométrique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par sa courbe représentée ci-dessous.



1) Résoudre graphiquement l'équation :

$$f(x) = 0$$

2) Résoudre graphiquement les inéquations :

a) $f(x) \leq 0$

b) $f(x) \geq x - 1$

3) Donner graphiquement suivant les valeurs du réel m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

3 Composée de deux fonctions numériques

1) Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$ et de $f \circ g$, puis calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = 4x^3 - 3x$

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x+3}$

c) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ et $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ et $g(x) = \sqrt{4 - x}$

2) Déterminer deux fonctions f et g tel que

$$F = g \circ f \text{ dans chacun des cas suivants}$$

a) $F(x) = \frac{1}{(2x^2 + 3)^{-3}}$

b) $F(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

4 Monotonie d'une fonction numérique

1) a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$ est strictement décroissante sur $]3; +\infty[$ et sur $]-\infty; 3[$

b) La fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$ est-elle strictement décroissante sur

$] -\infty; 3[\cup] 3; +\infty[$? (justifier votre réponse)

2) On considère les fonctions f et g définies sur

$\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2$ et $g(x) = x^2 - 1$

a) Étudier la parité de f

b) Calculer $f(1)$ puis montrer que :

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -1$$

c) i) Montrer que $f = g \circ g$

ii) En déduire les variations de f sur chacun des intervalles $I = [0; 1]$ et $I = [1; +\infty]$

d) En utilisant la parité de f , dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

5 fonction périodique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ périodique de période $T = 2$ tel que

$$\forall x \in [-1; 1] ; f(x) = 1 - x^2$$

• 1) Construire $\mathcal{C}_f$ sur $[-3; 5]$

2) Calculer $f(2023)$

3) Calculer $f(x)$ pour tout x dans $[-1 + 2k; 1 + 2k]$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$

6 fonction partie entière

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $E(x) = 0$

b) $E(x) = -2$

c) $E(x) = 3$

d) $E(x) = \frac{1}{2}$

2) Montrer que La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$

3) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^* : E\left(\frac{E(kx)}{k}\right) = E(x)$$

7 Représentation de $x \rightarrow ax^3$ et de $x \rightarrow \sqrt{x+a}$

1) Construire dans un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions :

a) $f : x \mapsto \frac{x^3}{8}$

b) $g : x \mapsto \left| \frac{x^3}{8} \right|$

c) $h : x \mapsto \sqrt{x+3}$

2) On considère dans l'équation :

$$(E) : x^6 - 64(x+3) = 0$$

a) Montrer que l'équation (E) n'admet pas de solution dans l'intervalle $] -\infty; -3]$

b) En utilisant les les trois graphiques précédents, montrer que l'équation (E) admet deux solutions dans l'intervalle $] -3; +\infty[$



SÉRIES D'EXERCICES N°5

LE BARYCENTRE DANS LE PLAN

1 Barycentre de deux points

1) A et B deux points distincts tel que

$$AB = 10\text{cm}$$

a) Construire Les points :

- $C = \text{bary}\{(A, 2); (B, 3)\}$
- $D = \text{bary}\{(A, 3); (B, 2)\}$.

b) Déterminer et représenter E_1 l'ensemble des points M du plan tel que :
 $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 10$

c) Déterminer et représenter E_2 l'ensemble des points M du plan tel que :
 $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|3\vec{MA} + 2\vec{MB}\|$

d) Déterminer et représenter E_3 l'ensemble des points M du plan tel que :
 $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| \leq 4$

2) Dans un repère du plan, on donne les points $A(3; 2)$ et $B(-1; 4)$. $G = \text{bar}\{(A, 3); (B, -2)\}$ et $G' = \text{bar}\{(A, -2); (B, 3)\}$.

- a) Calculer les coordonnées de G et G'
- b) Vérifier que $[AB]$ et $[GG']$ ont même milieu

2 Barycentre de trois points

Soit ABC est un triangle quelconque

1) Montrer que l'isobarycentre des trois points A ; B et C est le centre de gravité du triangle ABC

2) Les points I, J et K sont définis par :
 $\vec{AI} = \frac{5}{3}\vec{AC}$, $\vec{BJ} = \frac{5}{8}\vec{BC}$ et $\vec{AK} = 3\vec{AB}$

a) Exprimer I comme barycentre de A et C , J comme barycentre de B et C , et K comme barycentre de A et B .

b) Soit G le barycentre de $(A, -2)$, $(B, 3)$ et $(C, 5)$.

- i) Montrer que G est le milieu de $[BI]$.
- ii) Montrer que les droites (CK) , (BI) et (AJ) sont concourantes en G .

3 Barycentre de quatre points

$ABCD$ un carré de centre O de côté 4cm . Pour tout point M du plan, on pose $\vec{v} = \vec{MB} - \vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MD}$. G est le barycentre des points $\{(B, 1); (C, -4); (D, 1)\}$

1) Le système $\{(A, -1); (B, 1); (C, 1); (D, -1)\}$ admet-il un barycentre ?

2) Montrer que pour tout point M du plan, on a $\vec{v} = 2\vec{AB}$

3) Montrer que G est le symétrique de O par rapport à C

4) Déterminer et représenter l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M tels que
 $\|\vec{MB} - 4\vec{MC} + \vec{MD}\| = \|\vec{MB} - \vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MD}\|$

4 Lieux géométriques

Soit ABC est un triangle quelconque; I milieu de $[BC]$ et $m \in [-1; 1]$.

On pose : $G_m = \text{bary}\{(A, 1+m^2); (B, m); (C, -m)\}$

1) Construire les points I ; G_1 et G_{-1}

2) Montrer que pour tout réel $m \in [-1; 1]$:
 $\vec{AG_m} = \frac{-m}{1+m^2}\vec{BC}$

3) a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{-x}{x^2 + 1}$ est décroissante sur $[-1; 1]$

b) Vérifier que $f([-1; 1]) \subset \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

c) En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m décrit l'intervalle $[-1; 1]$

4) Déterminer et représenter E_1 l'ensemble des points M du plan tel que :

$$\|2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\|$$

5) Déterminer et représenter E_2 l'ensemble des points M du plan tel que :

$$\|2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$$



SÉRIES D'EXERCICES N°6

ETUDE ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

1 Expression analytique

1) Dans le plan $\mathcal{V}_2$ muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = -2\vec{i}$ et $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$. Calculer : $\vec{v} \cdot \vec{u}$; $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v} - \vec{u}\|$

2) Vrai ou faux (Justifier votre réponse)

a) $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}_2$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\iff \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}$$

b) $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}_2$:

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \implies \vec{u} = \vec{v}$$

2 Expression analytique

1) Soit ABC un triangle d'aire S et soit H le projeté orthogonale du point C sur (AB)

a) Montrer que : $S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin(\hat{A})$

b) En déduire que : $S = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})|$

2) Dans le plan (P) muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $E(-1, 2)$; $F(3, 5)$ et $G(6, 1)$

a) Calculer $\cos(\vec{EF}, \vec{EG})$ et $\sin(\vec{EF}, \vec{EG})$

b) En déduire la mesure principale de l'angle $(\vec{EF}, \vec{EG})$

c) Calculer l'aire du triangle EFG

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

1) A ; B et C trois points non alignés.

a) Montrer que : $AC \leq AB + BC$

b) Montrer que si a_1 ; a_2 ; a_3 ; b_1 ; b_2 et b_3 sont des nombres réels alors :

$$\sqrt{(a_3 - a_1)^2 + (b_3 - b_1)^2}$$

$$\leq \sqrt{(a_3 - a_2)^2 + (b_3 - b_2)^2} + \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

2) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a \neq 0$ et $b \neq 0$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz
Montrer que :

$$(a - c)^2 + (b - d)^2 \geq \frac{(ad - bc)^2}{a^2 + b^2}$$

4 vecteur normal

Donner un vecteur normal à la droite D dans chacun des cas suivants :

1) $(D_1) = (ox)$

2) $(D_2) : 4y - 5 = 0$

3) $(D_3) : x = 3$

4) $(D_4) : y = x$

5 Equation cartésienne d'une droite

Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(-4, 10)$; $B(8, 16)$; $C(8, -2)$ et $K(5, 7)$

1) Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$

2) Déterminer une équation de la hauteur issue de A du triangle ABC

3) Calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC

4) Calculer les coordonnées du point $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$

5) Montrer que le point K est le centre du cercle passant par les sommets du triangle ABC

6) Montrer que les points G ; H et K et sont alignés .

6 Distance d'un point à une droite

1) Déterminer La distance du point $A(x_A, y_A)$ à la droite (D) dans chacun des cas suivants :

a) $(D) = (ox)$ et $A(-1, 0)$

b) $(D) : 4y - 5 = 0$ et $A(-2, 2)$

c) $(D) : y = x$ et $A(1, 1)$

2) On considère les deux droites $(\Delta_1) : y = 0$ et $(\Delta_2) : x = 0$. Déterminer F l'ensemble des points M du plan tel que $d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2)$

7 Equation cartésienne d'un cercle

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal. Déterminer une équation du cercle $(\mathcal{C})$ dans chacun des cas suivants

1) Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(-1, 0)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$

2) Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(6, -8)$ et passe par O

3) Le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ avec $A(2; 2)$ et $B(6; -2)$.

4) Le cercle $(\mathcal{C})$ passe par les deux points $A(-1; 3)$ et $B(3; 1)$ et son centre appartient à la droite $(D) : 3x - y - 2 = 0$.

8 Représentation paramétrique d'un cercle

1) Soit $(\mathcal{C})$ d'équation :

$$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{5} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{5} \sin \theta \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer deux points appartenant au cercle $(\mathcal{C})$

b) Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$

2) On pose $A = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

a) Vérifier que $A \neq \emptyset$ et que $B \neq \emptyset$

b) Montrer que $A = B$

9 Ensemble des points

Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan dans chacun des cas suivants

1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

2) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

3) $x^2 + y^2 + y + 3 = 0$

4) $x^2 - y^2 = 0$

10 Positions relatives d'un cercle et d'une droite

Déterminer la position relative du cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ) puis étudier leurs intersections dans chacun des cas suivants

1) $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ et $(\Delta) : -2x + 3y = 0$

2) $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ et $(\Delta) : x + 2y + 2 = 0$

3) $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2x - 8y + 10 = 0$ et $(\Delta) : x - 2y - 1 = 0$

11 Droite tangente à un cercle

1) Justifier que le point A appartient au cercle $(\mathcal{C})$ puis déterminer l'équation de sa tangente au point A

a) $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$ et $A(1; -2)$

b) $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 + 2x + 2y - 18 = 0$ et $A(1; 3)$

c) $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ et $A(\sqrt{3}; \sqrt{3})$

2) On considère le cercle $(\mathcal{C})$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

a) Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathcal{C})$

b) Déterminer une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C})$

c) Étudier l'intersection du cercle $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses

d) trouver les équations des deux droites tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ et ayant $\vec{n}(1, 2)$ comme vecteur normal

e) trouver les équations des deux droites tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ et passant par le point $A(1, 0)$



SÉRIES D'EXERCICES N°7

CALCUL TRIGONOMETRIQUE

1 Formules de transformations

1) A l'aide des formules d'addition et de duplication, déterminer les valeurs des lignes trigonométriques des angles $\frac{\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{24}$

2) On donne $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; calculer $\cos \frac{2\pi}{5}$ puis $\cos \frac{3\pi}{5}$

3) Calculer $\sin a$; $\sin b$; $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$ sachant que $\cos a = \frac{1}{2}$; $\cos b = -\frac{1}{2}$; $0 < a < \frac{\pi}{2}$ et $0 < b < \pi$

4) Calculer $\cos a$; $\cos b$; $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$ sachant que $\sin a = \frac{2}{5}$; $\sin b = -\frac{3}{5}$; $0 < a < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < b < \pi$

5) Démontrer que $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

$\tan x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$ et en déduire les valeurs exactes $\tan \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$

6) Montrer que

a) $\forall x \in \mathbb{R} : \cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$

b) $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$

c) $\forall x \in \mathbb{R} : \cos^4(x) - \sin^4(x) = \cos(2x)$

d) $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$$

e) $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\tan \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

f) $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\cos(2\alpha) = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

g) $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\sin(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

h) $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

2 Transformation de produits en sommes

Montrer que pour tous réels x et y , on a :

1) $\cos(x + y) \cdot \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

2) $\cos(x + y) \cdot \cos(x - y) = \cos^2 y - \sin^2 x$

3) $\sin(x + y) \cdot \sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$

4) $\sin(x + y) \cdot \sin(x - y) = \cos^2 y - \cos^2 x$

3 Transformation de sommes en produits

Soit x un nombre réel.

1) Ecrire sous forme de produit $\cos x + \cos 7x$ et $\cos 3x + \cos 5x$

2) En déduire que

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 4 \cos x \cos 2x \cos 4x$$

4 Transformation de l'expression : $a \cos x + b \sin x$

1) Montrer que $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{18}} - \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{18}} = 4$

2) Montrer que $\frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{9}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{9}} = 4$

3) Montrer que $\frac{\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2}$

4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$-\sqrt{2} \leq \cos x + \sin x \leq \sqrt{2}$$

5 Equation et inéquation trigonométrique

1) On pose $A(x) = \sin(3x) + \sin(x) + 4\sqrt{3} \cos^3(x)$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sin(3x) + \sin(x) = 4 \sin(x) \cos^2(x)$$

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$A(x) = 4 \cos^2(x) (\sqrt{3} \cos x + \sin x)$$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 0$

d) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $A(x) = 0$ puis représenter les solutions dans le cercle trigonométrique

2) On considère l'équation :

$$(E) : \cos(2x) + \cos(3x) = 0$$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)

b) Résoudre dans $[-\pi; \pi[$ l'équation (E)

c) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$

d) En déduire que :

$$(E) \iff$$

$$4 \cos^3(x) + 2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) - 1 = 0 \quad (1)$$

e) Vérifier que

$$P(X) = 4X^3 + 2X^2 - 3X - 1 =$$

$$(X + 1)(4X^2 - 2X - 1)$$

f) En déduire les solutions de l'équation $P(X) = 0$

g) En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{5}$



SÉRIES D'EXERCICES N°8

SUITES NUMÉRIQUES

1 Généralités sur les suites numériques

1) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{8} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{2}{3}$$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n + \sin(n)$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

c) $\forall n \geq 5, u_n = n^2 - 10n + 26$

d) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} \end{cases}$$

a) Calculer u_1

b) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

c) i) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

ii) En déduire la monotonie de la suite (u_n)

d) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

e) i) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$

ii) En déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

f) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0; 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}} \end{cases}$$

i) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$

ii) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

iii) On suppose que $u_0 = \cos(\varphi)$ tel que $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

iv) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$

2 Suites arithmétiques

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{3 - u_n} \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$

b) i) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$

ii) En déduire la monotonie de la suite (u_n)

c) On pose $v_n = \frac{1}{1 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

i) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

ii) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \frac{n+1}{n+3}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

iii) Écrire la somme $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n

2) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ S_n = \sum_{k=1}^n v_k = 2(n^2 + n) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Calculer les quatre premiers termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

b) Calculer v_n en fonction de n

c) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique (Préciser sa raison et son premier terme)

3) Calculer les sommes :

a) $S_1 = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2018$

b) $S_2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2019$

c) Calculer la somme des multiples de 7 compris entre 1890 et 2024

4) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = 10$ et de premier terme $u_1 = 1$.

Calculer l'entier naturel n (s'il existe) tel que $\sum_{k=1}^n u_k = 2121$

3 Suites géométriques

1) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) i) Calculer u_2 et u_3

ii) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas géométrique

b) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = u_{n+1} - u_n$$

i) Calculer v_0 et v_1

ii) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique (Préciser sa raison et son premier terme)

iii) Ecrire v_n en fonction de n

iv) Ecrire la somme $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ en fonction de n

v) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 7 - \frac{3}{2^n}$

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5} \end{cases}$$

a) Calculer u_1

b) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$

c) i) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

ii) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

d) On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

i) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$

ii) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.



SÉRIES D'EXERCICES N°9

LIMITE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

1 Définition de la limite

Montrer, en utilisant la définition de la limite d'une fonction numérique, que :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3 = 1$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{4x-3} = 6$
- 3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{4}{x}\right) = 2$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) = 1$

2 Limites de fonctions polynômiales ; rationnelles

et irrationnelles

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{4}{3x-1} - \frac{1}{2}}{x-3}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{4 - \sqrt{x+13}}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^4 - 5x - 6}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x+1}}$
- 5) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-1}$
- 6) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} - \sqrt{x-2}}{x^2 - 4}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + x - 3}{2x^2 + 3x - 5}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9+4x^2}}{x+3}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5} + 5x}{3x+4}$

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1}}{x^2 - 1}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x)$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - \sqrt{4x^2 - 2})$$

$$14) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 + x + 3})$$

3 Limites de fonctions trigonométriques

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos x}{x^2}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x^2}{x \sin x}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan(\pi x)}{x+2}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \frac{\cos(2x) - \sin(2x)}{x - \frac{\pi}{8}}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$
- 8) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{5x+11} - 1}{\sin(x+2)}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\sin^3 x}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{2} \cos^2 x}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)}{1 + \cos(\pi x)}$
- 14) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cos x - 1}$
- 15) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(2x)(1 - 2 \sin x)}{2(\pi - x)}$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$



SÉRIES D'EXERCICES №10

LA ROTATION

1 Définition d'une rotation

Soient ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$; D le symétrique de A par rapport à la droite (BC) et D' le symétrique de D par rapport à C .

- 1) Quelle est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$? (justifier la réponse)
- 2) Quelle est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$? (justifier la réponse)
- 3) Déterminer le centre de la rotation r qui transforme A en B et transforme B en C

2 Propriétés d'une rotation

1) On considère un parallélogramme $ABCD$ de sens direct.

- a) Construire le triangle IAD rectangle et isocèle en I tel que $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et le triangle DCE rectangle isocèle en D tel que $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

- i) Déterminer l'image de A par la rotation r
- ii) Montrer que $r(B) = E$

c) Soit A' le symétrique de A par rapport à I

- i) Justifier que $r(D) = A'$
- ii) Montrer que $A'E = BD$ et que les droites $(A'E)$ et (BD) sont perpendiculaires.

2) ABC est un triangle rectangle et isocèle sommet A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

a) Construire le point A' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$

b) Construire le point C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$

c) Montrer que les points A ; A' et C' sont alignés

3) $ABCD$ est un parallélogramme de centre O tel que $AB \neq AD$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit E le point du plan tel que CED est un triangle équilatéral direct.

a) Faire une figure

b) i) Montrer qu'il existe une rotation r qui transforme A en E et B en D

ii) Déterminer son angle et construire son centre I

c) La droite (EC) coupe la droite (AB) en F

i) Montrer que $D \in [AE]$

ii) Montrer que le triangle AFE est équilatéral direct.

iii) Montrer que $r(F) = A$

iv) En déduire que le point I est le centre du cercle circonscrit au triangle AEF

d) soit r' la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

i) Déterminer $r'(D)$ et $r'(F)$

ii) En déduire que les droites (FD) et (BE) sont sécantes en un point J

iii) Montrer que $(\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JB}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

e) On désigne par $(\mathcal{C}')$ le cercle circonscrit au triangle ABD . Montrer que le cercle $(\mathcal{C}')$ passe par les points I et J



SÉRIES D'EXERCICES N°11

DÉRIVATION

1 Dérivabilité en un point

1) Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point demandé

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -1 - 4x, & \text{si } x < -1 \\ x^4 + 2, & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \quad \text{et } x_0 = -1$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}; & x \neq 1 \\ -1; & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{et } x_0 = 1$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}; & x \neq 0 \\ 1; & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } x_0 = 0$$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

a) Montrer que :

f est dérivable en x_0

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

b) La réciproque est-elle vraie ?

(Justifier la réponse)

2 Interprétations géométriques

1) On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$

a) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu

b) Donner l'approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 0$

c) En déduire une valeur approchée pour chacun des deux nombres $\sqrt{1,000462}$ et $\sqrt{0,996}$

2) Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point demandé puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

$$\text{a) } f(x) = |x^2 - 2x| \text{ et } x_0 = 2$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{x-1} \sin(x-1);$$

(à droite en $x_0 = 1$)

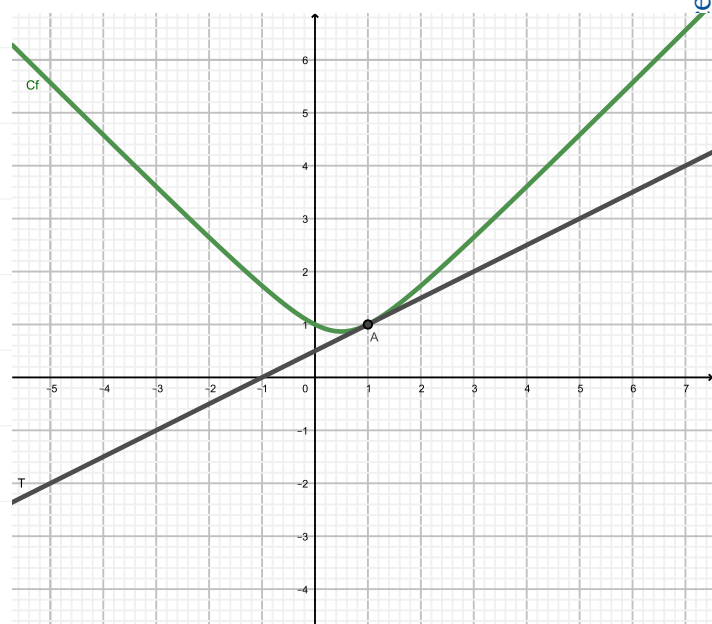
$$\text{c) } f(x) = \sqrt{1-x^2}; \text{ (à gauche en } x_0 = 1 \text{)}$$

$$\text{d) } f(x) = \cos(\sqrt{x}); \text{ (à droite en } x_0 = 0 \text{)}$$

e) Sur figure ci-dessous la droite (T) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f en A

i) Déterminer une équation cartésienne de (T)

ii) En déduire $f'(1)$



3 Dérivabilité sur un intervalle

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$

a) Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue, selon les valeurs de x

b) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? (Justifier la réponse)

2) f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2xg(x)$
- $g(0) = 0$
- La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$

4 Monotonie et signe de la dérivée - dérivées successives

1) En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x-5)^{2026} - 1}{4 - x^2}$

2) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer $\mathcal{D}_f$; $\mathcal{D}_{f'}$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x dans $\mathcal{D}_{f'}$ et dresser le tableau de variation de f

- $f(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2$
- $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$
- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
- $f(x) = x - \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x-1}$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x) - x + \frac{1}{6}x^3$

a) Calculer $f'(x)$; $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$: $f'(x) \geq 0$
 $f''(x) \geq 0$ et $f^{(3)}(x) \geq 0$

c) Montrer que :

- $\forall x \geq 0, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$
- $\forall x \geq 0, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$

4) Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I tel que $f'' + f = 0$

Montrer la fonction $\varphi = f^2 + f'^2$ est constante sur I

5) Soit f la fonction définie sur $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$

a) Montrer que le signe de $f'(x)$ sur I est celui de $2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1$

b) Soit g la fonction définie sur $J =]0, 1]$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

- Etudier le signe de g sur J puis en déduire celui de f sur I
- En déduire que :

$$\forall x \in I, 2 \sin x + \tan x \geq 3x$$

5 Extrémum d'une fonction dérivable

Déterminer les extremums de f s'il existe dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$
- $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x - 2$
- $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$

6 Equation différentielle du type $y'' + w^2y = 0$

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $(E_1) : y'' + y = 0$
- $(E_2) : 2y'' + 3y = 0$
- $(E_3) : 4y'' + y = 0$

2) Déterminer la solution de l'équation (E_3) qui vérifie $y(\pi) = 1$ et $y'(\pi) = -1$



SÉRIES D'EXERCICES N°12

ÉTUDE DE FONCTIONS

1 Asymptotes verticales - Asymptotes

horizontales

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 6}{x^2 - 10x + 24}$$

- 1) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f
- 2) Calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$ ensemble de définition de f ; puis donner, s'ils existent les équations des asymptotes parallèles aux axes

2 Asymptote Oblique

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x - 1)(x + 4)}$$

- 1) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f
- 2) Déterminer les réels a ; b ; α et β tels que $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = ax + b + \frac{\alpha x + \beta}{(x - 1)(x + 4)}$
- 3) Calculer $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b))$; puis interprétez le résultat obtenu

3 Directions asymptotiques

Dans chacun des cas suivants, déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f ; calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$ puis étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$

- 1) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x + 2}$
- 2) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x + 2} + x$

$$3) f(x) = x + \sqrt{x^2 - x - 2}$$

4 Concavité d'une courbe - point d'inflexion

- 1) Dans chacun des cas suivants, déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f ; étudier la convexité de $\mathcal{C}_f$ puis préciser lorsque $\mathcal{C}_f$ admet des points d'inflexions

$$a) f(x) = x^5 - 5x^4$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

- 2) a) Étudier la concavité de la fonction

$$x \mapsto \sin(x) \text{ sur } [0, 2\pi]$$

- b) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$
- c) En utilisant la définition de la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur $[0, \pi]$, montrer que :

$$\forall x \in [0, \pi], \sin(x) \leq \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- d) En déduire que si a ; b et c sont les mesures des angles d'un triangle alors : $\sin a + \sin b \sin c \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

5 Éléments de symétrie de la courbe d'une fonction

- 1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$

a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f

b) Montrer la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f

b) Montrer point $A(-1, -2)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$

6 Exemples d'études de fonctions

1) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = |x - 1| + \frac{1}{x + 1}$$

a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f

b) Calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

c) Étudier les branches infinies de la courbe représentative de f et préciser sa position relative par rapport à ses asymptotes obliques

d) Étudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

e) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$

f) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 1[-\{-1\}$

g) Dresser le tableau de variation de f

h) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

i) Discuter suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

2) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = |x| \sqrt{x^2 - 1}$$

a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f

b) Étudier la parité de f puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

d) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$; étudier son signe puis dresser le tableau de variation de f

e) Étudier les branches infinies de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$

f) i) Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$

ii) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite $(D) : y = x$ sur l'intervalle $] -\infty, -3]$

g) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

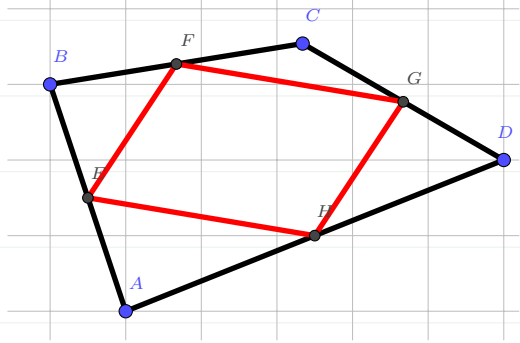


SÉRIES D'EXERCICES N°13

VECTEURS DE L'ESPACE

1 Calcul vectoriel dans l'espace

- 1) Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque les points E ; F ; G et H sont les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$ et $[DA]$. Montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.



- 2) Soit $ABCDEFGH$ un cube. les points I ; J ; K ; L ; M ; N ; P et Q sont les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$; $[DA]$; $[EF]$; $[FG]$; $[HG]$ et $[EH]$. Le point O est le centre de la face $ABCD$. Compléter les égalités suivantes avec les points convenables :

a) $\overrightarrow{D.....} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$

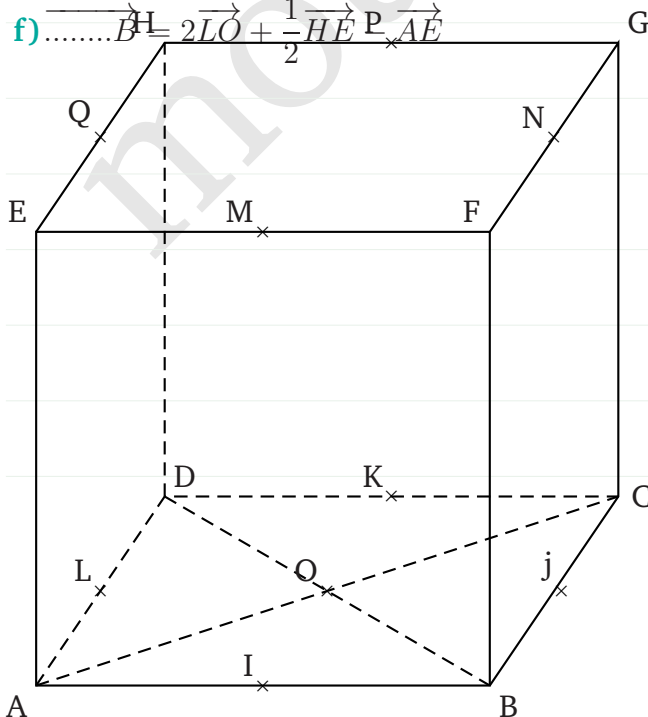
b) $\overrightarrow{A.....} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

c) $\overrightarrow{K.....} = \overrightarrow{GF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BN}$

d) $\overrightarrow{B.....} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$

e) $\overrightarrow{.....H} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

f) $\overrightarrow{.....B} = 2\overrightarrow{LO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{AE}$



2 Vecteurs colinéaires

- 1) Soit $ABCD$ un tétraèdre. les points I ; J ; K et L sont tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

a) Faire une figure

b) Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

- 2) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Montrer en utilisant un raisonnement par l'absurde que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0} \implies \alpha = \beta = 0$$

- 3) Soit $ABCDEFGH$ un cube.

a) Construire les points M ; N et P tels que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

b) Montrer que les points M ; N et P sont alignés..

3 Vecteurs coplanaires

- 1) Soit $ABCD$ un tétraèdre. les points P ; Q ; R et S sont tels que : $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BQ} = -3\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CR} = \frac{5}{3}\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{DS} = \frac{4}{9}\overrightarrow{DA}$

a) Faire une figure

b) Exprimer $\overrightarrow{PQ}$; $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

c) Montrer que $\overrightarrow{PQ}$; $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$ sont coplanaires

- 2) Soit $ABCD$ un tétraèdre. les points I et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. Les points J et L sont tels que : $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

a) Faire une figure

b) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

c) Les points I ; J ; K et L sont ils coplanaires? justifier la réponse

SÉRIES D'EXERCICES N°14

ETUDE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

1 Coordonnées d'un point dans un repère

Soient $A(-3, 2, 1)$; $B(2, -2, 0)$; $C(-1, -1, 4)$ et $D(x, y, z)$ quatre points de l'espace $(\mathcal{E})$ muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1) Déterminer les coordonnées du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

2) Déterminer les coordonnées du point G tel que $\vec{GA} + \vec{GB} - 3\vec{GC} = \vec{0}$

2 Colinéarité de deux vecteurs On considère les points $A(0, 4, -1)$; $B(3, 2, 3)$; $C(1, -1, 6)$ et $D(-\frac{1}{2}, 0, 4)$. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

3 Vecteurs coplanaires

1) Les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires dans chacun des cas suivants

a) $\vec{u}(1, -2, 1)$; $\vec{v}(1, 1, -1)$; $\vec{w}(7, -4, 1)$

b) $\vec{u}(2, 1, -1)$; $\vec{v}(1, -3, 2)$; $\vec{w}(7, 0, 4)$

c) $\vec{u}(1, 0, 1)$; $\vec{v}(8, 3, -5)$; $\vec{w}(6, 3, -7)$

2) Les points A ; B et C et D sont-ils coplanaires dans chacun des cas suivants

a) $A(2, 3, 2)$; $B(-2, 1, 3)$; $C(0, 2, 4)$ et $D(4, 0, -3)$

b) $A(-2, -1, 0)$; $B(6, 0, 2)$; $C(-1, -2, 1)$ et $D(1, 1, -2)$

4 Représentation paramétrique d'une droite

1) Déterminer une représentation paramétrique de l'axe des abscisses

2) Déterminer une représentation paramétrique de l'axe des ordonnées

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) dans chacun des cas suivants

a) (D) passe par les points $A(2, 0, 1)$ et $B(-3, -4, 1)$

b) (D) passe par le point $A(1, -1, 2)$ et parallèle à l'axe des ordonnées

4) Soit (D) la droite définie par

$$(D) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

a) Donner les coordonnées de deux points appartenant à (D)

b) Le point de coordonnées $(-5, 9, 4)$ appartient-il à (D) ? (Justifier la réponse)

c) Donner un vecteur directeur de (D)

d) Donner le vecteur directeur de (D) de cote 7

5 positions relatives de deux droites

On munit l'espace d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Soient les droites (D_1) et (D_2) de représentations paramétriques respectives

$$D_1 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 - \frac{1}{2}t \\ z = \frac{3}{2}t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{et } D_2 : \begin{cases} x = -7 - 4t' \\ y = 3 + 2t' \\ z = \frac{1}{2} - 6t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$$

Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles.

2) Soient les droites (D_1) et (D_2) de représentations paramétriques respectives

$$D_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{et } D_2 : \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = -3t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$$

a) Démontrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes

b) Préciser les coordonnées du point A leur point d'intersection.

6 Représentation paramétrique d'un plan

Déterminer une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P})$ dans chacun des cas suivants

- 1) $(\mathcal{P})$ passe par les points $A(2, 0, 1)$ et dirigé par $\vec{u}(1, 1, 1)$ et $\vec{v}(2, -1, 3)$
- 2) $(\mathcal{P})$ passe par les points $A(1, 1, 1)$; $B(2, 2, 1)$ et $C(-1, 3, 0)$
- 3) $(\mathcal{P})$ passe par le point $A(7, 2, -5)$ et parallèle aux axes (oy) et (oz)

7 Equation cartésienne d'un plan

- 1) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ dans chacun des cas suivants
 - a) $(\mathcal{P}) = (oxy)$
 - b) $(\mathcal{P})$ passe par les points $A(-1, 1, -1)$ et dirigé par $\vec{u}(1, 0, 2)$ et $\vec{v}(3, -2, 4)$
 - c) $(\mathcal{P})$ passe par les points $A(3, -2, 2)$; $B(6, 1, 5)$ et $C(6, -2, -1)$
- 2) Déterminer une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P}) : 2x + 3y - z + 2$

8 Positions relatives de deux plans

- 1) On considère les plans $(\mathcal{P}_1) : x + 2y - z + 1 = 0$ et $(\mathcal{P}_2) : 3x + 4y - 2z + 5 = 0$
 - a) Montrer que les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants suivant une droite $(\mathcal{D})$
 - b) Donner une représentation paramétrique de droite $(\mathcal{D})$
 - c) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ est contenue dans le plan $(\mathcal{P}) : 2x + 6y - 3z = 0$
- 2) On considère les points $A(1, 1, 0)$; $B(1, 2, 1)$ et $C(3, -1, 2)$
 - a) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés
 - b) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation : $2x + y - z - 3 = 0$
 - c) On considère les plans $(\mathcal{P}) : x + 2y - z - 4 = 0$ et $(\mathcal{Q}) : 2x + 3y - 2z - 5 = 0$. Démontrer que

les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont sécants suivant la

$$\text{droite } (\mathcal{D}) : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- 3) Déterminer l'intersection des trois plans (ABC) ; $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$

9 Deux équations cartésiennes d'une droite

- 1) Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite $(\mathcal{D})$ dans chacun des cas suivants
 - a) $(\mathcal{D}) = (ox)$
 - b) $(\mathcal{D}) = (oy)$
 - c) $(\mathcal{D})$ passe par les points $A(-1, 2, 1)$ et $B(3, -2, 0)$
 - d) $(\mathcal{D})$ passe par le point $A(1, -1, 2)$ et parallèle à l'axe des abscisses
- 2) Le système $x = y = z$ définit-il une droite $(\mathcal{D})$? si oui donner sa représentation paramétrique
- 3) Le système $(S) : \begin{cases} 2x - y - z + 7 = 0 \\ x = 5 \end{cases}$ définit-il une droite $(\mathcal{D})$? si oui donner sa représentation paramétrique

10 Positions relatives d'une droite et d'un plan

- 1) On considère les points $A(1, 1, 5)$; $B(-1, -3, 4)$ et le plan $(\mathcal{P}) : 2x - 2y + z - 2 = 0$
 - a) Montrer que (AB) et $(\mathcal{P})$ ne sont pas parallèles
 - b) Déterminer les coordonnées du point K intersection de (AB) et $(\mathcal{P})$
- 2) On considère les points $A(1, 0, 4)$; $B(2, 3, 0)$; $C(-1, 2, 0)$; $D(10, 2, 3)$ et $E(15, 5, 1)$
 - a) Justifier que les points A ; B et C définissent un plan
 - b) Démontrer que la droite (DE) est parallèle au plan (ABC)

SÉRIES D'EXERCICES N°15

DÉNOMBREMENT

1 Cardinal d'ensembles fini

1) A , B et C sont trois ensembles finis non vides

Montrer que :

$$Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B)$$

$$+ Card(C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C)$$

$$- Card(B \cap C) + Card(A \cap B \cap C)$$

2) Dans une classe de 40 élèves, 8 élèves aiment faire la physique, 15 aiment faire les mathématiques et 9 aiment faire le français. D'autre part, 4 aiment faire les mathématiques et le français, 5 aiment faire les mathématiques et la physique, 2 aiment faire la physique et le français et 2 aiment faire les 3 matières.

a) Dénombrer les élèves qui n'aiment faire ni les mathématiques ni la physique ni le français.

b) Dénombrer les élèves qui aiment faire les mathématiques et aiment faire le français mais n'aiment pas faire la physique.

2 Principe fondamental du dénombrement - Principe multiplicatif

1) Combien de nombre pairs de trois chiffres peut-on former avec les chiffres 0 ; 1 et 2 ?

2) Combien de nombre de deux chiffres que l'on peut former sachant que ces deux chiffres sont inférieurs ou égaux à 4

3) Quel est le nombre de numéros de téléphone portable commençant par 0661 ?

4) Combien de nombres différents de 6 chiffres existe-t-il dans chacun des cas suivants ?

a) Il n'y a aucune restriction.

b) les nombres doivent être divisibles par 5

c) les répétitions des chiffres sont exclues

5) a) Combien y a-t-il de mots possibles formés avec 2 lettres de l'alphabet ?

b) Combien y a-t-il de mots de 2 lettres commençant par la lettre a ou se terminant par la lettre z ?

c) Combien y a-t-il de 2 lettres distinctes

6) On lance trois fois de suite un dé et on note dans l'ordre, les résultats obtenus.

a) Combien y a-t-il de résultats possibles ?

b) Combien peut-on obtenir de résultats où tous les numéros obtenus sont supérieurs ou égaux à cinq ?

c) Combien peut-on obtenir de résultats où tous les numéros obtenus sont égaux ?

d) Combien peut-on obtenir de résultats où ne figure pas le numéro 6 ?

e) Combien peut-on obtenir de résultats où figure au moins une fois le numéro 6 ?

7) Parmi tous les nombres de 1 à 1000, combien de fois le chiffre 9 apparaît-il ?

3 Arrangement - Permutation et Combinaison

1) On dispose de 6 chiffres : 1 ; 2 et 3 ; 4 ; 5 et 6

a) Combien de nombre de 6 chiffres distinctes peut-on former ?

b) Combien de nombre de 4 chiffres distinctes peut-on former ?

c) Combien de nombre de 4 chiffres peut-on former ?

2) Une classe de 26 élèves : 14 filles et 12 garçons doit élire un comité composé d'un président ; un vice-président et un secrétaire

- a) Combien de comité peut on consititué ?
 - b) Combien de comité peut on consititué sachant que le poste de secrétaire doit être occupé par une fille ?
 - c) Combien de comité peut on consititué sachant que le poste de secrétaire doit être occupé par une fille ?
 - d) Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est un garçon et le secrétaire une fille
- 3) Quatre couples doivent être assis dans une rangée de 8 chaises. Combien y a-t-il de façon possible dans chacun des cas suivants ?
- a) E_1 : Il n'y a pas de contraintes.
 - b) E_2 : Les hommes doivent rester ensemble et les femmes aussi.
 - c) E_3 : Les hommes doivent rester ensemble .
 - d) E_4 : Chaque couple marié doit rester ensemble .

4 Tirages

- 1) Une urne contient 12 boules : 3 rouges, 4 blanches et 5 vers. On tire simultanément 3 boules.
- a) Calculer le nombre de tirages possibles
 - b) Calculer le nombre de tirages possibles dans chacun des cas suivants
 - "les trois boules sont rouges" ;
 - "On a tiré une boule de chaque couleur" ;
 - "Aucune des trois boules n'est rouge " .
- 2) Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires
- a) On tire simultanément 2 boule de cette urne
 - i) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
 - ii) Calculer le nombre de tirages possibles dans chacun des cas suivants
 - "Tirer deux boules de même couleur"

- " Tirer deux boules de couleurs différentes "

- b) Mêmes questions si l'on effectue des tirages successives et avec remise
- c) Mêmes questions si l'on effectue des tirages successives et sans

5 Propriétés des nombres C_n^p - Formule du binôme

1) Vérifier que :

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

2) Montrer que pour tous réels a et b et pour tout entier naturels n , on a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

3) Montrer que :

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + \dots + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire simultanément n boules de cette urne

- i) Calculer de deux méthodes différentes le nombre de tirages possibles
- ii) En déduire l'égalité

$$(\star\star) : (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et Soit $n \in \mathbb{N}$.

En développant $(1 + x)^{2n}$ de deux façons différentes, démontrer l'égalité $(\star\star)$

5) Calculer les sommes :

- $S_1 = \sum_{k=0}^n C_n^k$
- $S_2 = \sum_{k=1}^n k C_n^k$
- $S_3 = \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k$
- $S_4 = \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k$

SÉRIES D'EXERCICES N°16

PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathbb{V}_3$ ET SES APPLICATIONS

1 Définition et propriétés On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arrête a ; J milieu de $[FG]$. Calculer en fonction de a

- 1) $\vec{EG} \cdot \vec{HF}$
- 2) $\vec{EG} \cdot \vec{EC}$
- 3) $\vec{DF} \cdot \vec{DH}$
- 4) $\vec{DB} \cdot \vec{EG}$
- 5) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- 6) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$
- 7) $\vec{AB} \cdot \vec{EG}$
- 8) $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$
- 9) $\vec{AB} \cdot \vec{EH}$
- 10) $\vec{AE} \cdot \vec{DG}$

2 Expression analytique Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses (justifier la réponse)

- 1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}$
- 2) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \implies \vec{u} = \vec{v}$
- 3) $\vec{u}^2 = \vec{v}^2 \implies \vec{u} = \vec{v} \text{ ou } \vec{u} = -\vec{v}$

3 Equation cartésienne d'un plan définie par un point et un vecteur normal

1) Soit $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace. Montrer que : un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal au plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(\mathcal{P})$

2) Dans l'espace $(\mathcal{E})$ munit d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : $A(1, 1, 5)$; $B(3, 1, 1)$ et $C(-2, -3, -1)$

a) Vérifier que les points A ; B et C ne sont pas alignés

b) Déterminer un vecteur normal au plan (ABC)

c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

4 Positions relatives : de deux plans; d'une droite et d'un plan

1) Soient $A(-1, 2, -8)$; $B(3, 4, 4)$ et $C(1, 0, 4)$ trois points de l'espace.

a) Montrer que les points A ; B et C définissent un plan

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

c) Vérifier que les plans (ABC) et $(\mathcal{P}) : x + 3y - 2z + 1 = 0$ sont perpendiculaires

d) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$ intersection des deux plans (ABC) et $(\mathcal{P})$

e) Déterminer une équation cartésienne du plan du plan $(\mathcal{P}')$ passant par A et parallèles à $(\mathcal{P})$

2) Déterminer l'intersection du plan $(\mathcal{P}) : 2x - y + 3z - 2 = 0$ et de la droite (D) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

5 Distance d'un point à un plan

Dans l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère les points : $A(1, -1, 2)$; $B(0, -1, 3)$; $C(2, -3, 1)$ et $D(-1, -3, 0)$

1) Vérifier que les points A ; B et C ne sont pas alignés

2) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

3) Calculer de deux façons différentes la distance du point D au plan (ABC)

6 Equation cartésienne d'une sphère

1) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[AB]$ avec $A(-1, 0, 0)$ et $A(0, 0, 1)$

2) Déterminer une équation cartésienne de la

sphère (S) de centre $\Omega(4, 1, 2)$ et qui passe par le point $A(-1, 1, 2)$ puis donner une équation du plan tangent en A à cette sphère.

7 Ensemble des points

Déterminer l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace pour chacun des cas suivants

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

2) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x + 28y - 48z + 204 = 0$

3) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 18z + 97 = 0$

4) $x^2 - y^2 + z^2 + 2xz = 0$

8 Positions relatives d'un plan et d'une sphère ; d'une droite et d'une sphère

1) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 14z + 25 = 0$

b) Déterminer la position relative du plan ($\mathcal{P}$) : $x + y + z - 7 = 0$ par rapport à la sphère (S)

2) Déterminer la position relative de la droite (D) par rapport à la sphère (S) dans chacun des cas suivants :

a) $\left\{ \begin{array}{l} (S) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25 \\ (D) = (AB) \end{array} \right.$

où $A(3, 4, 12)$ et $B(6, 8, 0)$

b) $\left\{ \begin{array}{l} (S) \text{ de rayon } 6 \text{ de centre } O(0, 0, 0) \\ (D) = (AB) \end{array} \right.$

où $A(3, 0, -1)$ et $B(4, 4, 2)$

3) Dans l'espace ($\mathcal{E}$) rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère les points : $A(-2, 0, 1)$; $B(1, 2, -1)$ et $C(-2, 2, 2)$

a) Vérifier que les points A ; B et C ne sont pas alignés

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

c) Montrer que les plans ($\mathcal{P}_1$) : $x + y - 3z + 3 = 0$ et ($\mathcal{P}_2$) : $x - 2y + 6z = 0$ sont sécants suivant la droite (D) dont une représentation

paramétrique est $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ y = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

d) Montrer que la droite (D) et le plan (ABC) sont sécants suivant et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

e) Soit S la sphère de centre $\Omega(1; -3; 1)$ et de rayon $r = 3$

i) Étudier l'intersection de la sphère S et de la droite (D)

ii) Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère S

9 Plan médiateur

Soient A et B deux points distincts de l'espace. I milieu de $[AB]$. On note F l'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants de A et B .

1) Montrer que $M \in F \iff \vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0$

2) En déduire que F est un plan dont on donnera un point et un vecteur normal. (ce plan s'appelle le plan médiateur du segment $[AB]$)

3) Application : donner une équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$ avec $A(1, -1, 2)$ et $B(0, -1, 3)$

10 Applications à la résolution de problèmes géométriques

Dans l'espace ($\mathcal{E}$) rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère les points : $A(-2, 0, 1)$; $B(1, 2, -1)$ et $C(-2, 2, 2)$

1) Vérifier que les points A ; B et C ne sont pas alignés

2) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

3) Montrer que les plans ($\mathcal{P}_1$) : $x + y - 3z + 3 = 0$ et ($\mathcal{P}_2$) : $x - 2y + 6z = 0$ sont sécants suivant la droite (D) dont une représentation

paramétrique est $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ y = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

4) Montrer que la droite (D) et le plan (ABC) sont sécants suivant et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

5) Soit S la sphère de centre $\Omega(1; -3; 1)$ et de rayon $r = 3$

a) Étudier l'intersection de la sphère S et de la droite (D)

b) Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère S

SÉRIES D'EXERCICES N°17

PRODUIT VECTORIEL

1 Coordonnées du produit vectoriel

Dans l'espace $(\mathcal{E})$ muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(1, 1, 1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{a}(1, 2, 3)$ et $\vec{b}(1, 1, 1)$

1) Trouver un vecteur $\vec{c}$ tel que $\vec{c}$ soit normal au plan $(\mathcal{P})$

2) Trouver un vecteur $\vec{d}$ tels que les vecteurs $\vec{a}$; $\vec{b}$ et $\vec{d}$ soient coplanaires et $\vec{d}$ orthogonal à $\vec{a}$

3) Calculer $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ et $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$

4) Conclure.

2 Applications du produit vectoriel

1) Dans l'espace $(\mathcal{E})$ muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : $A(1, 2, 3)$; $B(3, 0, -3)$ et $C(5, 2, 6)$

a) Déterminer Les coordonnées du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ dans la base $B = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

b) Calculer l'aire du triangle ABC

c) Calculer la longueur de la hauteur du triangle ABC issue de B

d) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Calculer la disance du point $A(1, 2, 1)$ à la droite $(D) : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$

3) Soient $A(1, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 1)$ trois points de l'espace $(\mathcal{E})$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC)

c) Soit (Δ) l'ensemble des points M de l'espace tel que :

$$\vec{AM} \wedge \vec{BM} = (\sqrt{3} - 1)(\vec{i} + \vec{j}) - \vec{k}$$

i) Vérifier que $\Omega(1, 1, \sqrt{3} - 1) \in (\Delta)$

ii) En déduire que l'ensemble (Δ) est la droite passant par Ω et dirigée par $\vec{AB}$

4) Soient A ; B ; C et D quatre points de l'espace $(\mathcal{E})$.

a) On considère les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ d'équations respectifs $-x + 2y + z - 5 = 0$ et $2x - y + 3z - 1 = 0$

i) Vérifier que ces deux plans ne sont pas parallèles.

ii) Donner une représentation paramétrique de leur intersection (D)

iii) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$ passant par $A(1, 1, 0)$ et perpendiculaire aux deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$

5) Montrer que : $\forall M \in (\mathcal{E})$,

$$\vec{MA} \wedge \vec{MB} + \vec{MB} \wedge \vec{MC} + \vec{MC} \wedge \vec{MA} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$$

6) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que :

$$(\vec{MA} \wedge \vec{MB}) \wedge (\vec{MC} \wedge \vec{MD}) = \vec{0}$$



SÉRIES D'EXERCICES N°18

L'ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{Z}$

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1) Montrer que $\forall (n, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} a|2n+1 \\ a|3n+1 \end{cases} \implies a=1$$

2) Montrer que $\forall (n, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} d|n^2+3 \\ d|2n-1 \end{cases} \implies d|13$$

3) Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$7|(2a+3b) \iff 7|(5a+4b)$$

4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n^2+1)|(n+1) \iff n=1$$

5) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2$;

$$3|(x^3+y^3) \implies 3|(x+y)^3$$

6) soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$$

a) Calculer $u_{n+1} - 2u_n$.

b) Montrer par récurrence que :
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad 7|u_n$

7) Déterminer en extension les ensembles suivants :

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n+17}{n+4} \in \mathbb{Z}\}$

b) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n-1}{n-3} \in \mathbb{Z}\}$

c) $C = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a^2 - b^2 = 9\}$

d) $D = \{a \in \mathbb{Z} \mid (a \neq 1) \wedge (a-1)|(a^2+5)\}$

e) $E = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid ab = 2a + 3b\}$

8) Pour chacune des propositions suivantes, préciser s'elle est vraie ou bien s'elle est fausse (donner un contre exemple si la proposition est fausse et la démontrer s'elle est vraie)

a) Si un entier relatif est divisible par 3 alors il est divisible par 9

b) Si un entier relatif est divisible par 9 alors il est divisible par 3

c) La somme de deux diviseurs d'un entier relatif est encore un diviseur de cet entier

d) La somme de deux multiples d'un entier relatif est encore un multiple de cet entier

e) la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4

f) Le produit de trois nombres pairs consécutifs est divisible par 48.

g) Si un entier est divisible par deux entiers, alors il est divisible par leur produit

h) Si un nombre divise le produit de deux entiers, alors il divise au moins un de ces deux entiers

2 Division euclidienne

1) Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

a) $a = 2024$ par $b = 23$

b) $a = 13$ par $b = -3$

c) $a = -17$ par $b = 3$

d) $a = -31$ par $b = -5$

2) Montrer que tout entier relatif a s'écrit sous la forme $3k$ ou $3k+1$ ou $3k+2$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)

3) Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{Z}, (3|a^2) \text{ ou } (3|a^2-1)$$

4) Le nombre d'élèves d'une classe est inférieur à 50. Si on les regroupe par 4 ou par 11, il en reste 1 à chaque fois. Quel est ce nombre ?

5) Le reste de la division euclidienne de a par 17 est 8, celui de b par 17 est 12. Déterminez le reste de la division euclidienne par 17 de :
 $a+b$; ab et de a^2

6) Soit $n \in \mathbb{N}$

a) Quel est le reste de la division euclidienne de $(n+5)^2$ par $n+3$?

b) Pour quelles valeurs de n , $(n+5)^2$ est-il un multiple de $n+3$?

3 Nombres premiers

- 1) a) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 1750 et 1960
- b) En déduire $PGCD(1750, 1960)$
- c) Déterminer par l'algorithme $PGCD(1750, 1960)$
- 2) Déterminer le nombre de diviseurs de $a = 22 \times 21^2 \times 7$
- 3) a) Vérifier que 521 est premier
- b) Déterminer tous couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a^2 - b^2 = 521$
- 4) a) Montrer que tout nombre premier $p > 2$ est nécessairement impair
- b) Montrer que si l'entier naturel n est premier, alors $n + 7$ n'est pas premier

4 PGCD et PPCM

- 1) soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que $a \wedge b = a \wedge (a - b)$
- 2) Déterminer en extension les ensembles :
 - a) $E = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 / (a \wedge b = 3) \text{ et } (a \vee b = 12)\}$
 - b) $F = \{a \in \mathbb{N}^* / PPCM(a, 28) = 140\}$
- 3) soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que $a \mid b \iff a^2 \mid b^2$

5 Congruence

- 1) Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. montrer que $a \equiv b[n] \implies \forall k \in \mathbb{N} \quad ka \equiv kb[n]$.
La réciproque est-elle vraie? (Justifier la réponse)
- 2) a) Vérifier que $2^5 \equiv -1[11]$ et $3^5 \equiv 1[11]$
- b) En déduire que $11 \mid 2^{123} + 3^{121}$
- 3) a) Montrer que $2^{12} \equiv 1[13]$
- b) Montrer que $3^6 \equiv 1[13]$
- c) En déduire qu $(2^{70} + 3^{70}) \equiv 0[13]$
- 4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$
- 5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 5 \mid 16 \times 7^{2n} - 28 \times 3^{2n+3}$
- 6) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$
 $13 \mid 18^{4n-1} + 44^{4n-1} + 3 \times 96^{4n+2}$
- 7) soit $X = 2222^{3333} + 3333^{2222}$
 - a) Justifier que $3333 \equiv 3[5]$;
 $2222 \equiv 2[5]$; $3^4 \equiv 1[5]$ et $2^4 \equiv 1[5]$
 - b) En déduire que $5 \mid X - 1$
- 8) déterminer le reste de la division euclidienne de 12^{2024} par 5
- 9) déterminer le reste de la division euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

10) soit $n \in \mathbb{N}$. montrer que $7 \nmid n \implies 7 \mid n^6 - 1$

11) soit $n \in \mathbb{N}$. montrer que $5 \nmid n(n^4 - 1)$

12) soit $n \in \mathbb{Z}$. montrer que $6 \mid n^3 - n \implies 30 \mid n^5 - 5$

13) soit $n \in \mathbb{N}$. montrer que $11 \mid n \implies 7 \mid n^2 - 1$

14) soit $n \in \mathbb{N}$. montrer que $11 \mid 3^{n+3} - 4^{4n+2}$

15) a) Montrer que tout nombre premier $p > 3$ s'écrit sous la forme $p = 6k + 1$ ou $p = 6k + 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$

b) En raisonnant par disjonction des cas, montrer que si p est un nombre premier et $p \geq 5$ alors 24 divise $p^2 - 1$

6 L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

a) $x + \bar{2} = \bar{0}$

b) $\bar{3}x = \bar{1}$

c) $\bar{3}x^2 + \bar{2}x = \bar{0}$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z} : 4x \equiv 3[5]$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z} : x^2 \equiv x[6]$

4) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 :$

$$7 \mid x \text{ et } 7 \mid y \iff 7 \mid (x^2 + y^2)$$

5) Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année.

Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul suivant :

Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m , le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$

a) Démontrer que $7m$ et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12

b) Pour m variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12

On pourra donner la réponse sous la forme d'un tableau de congruence)

c) En déduire la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 251 avec le programme de calcul ci-dessus