

1^{ère} Re BAC

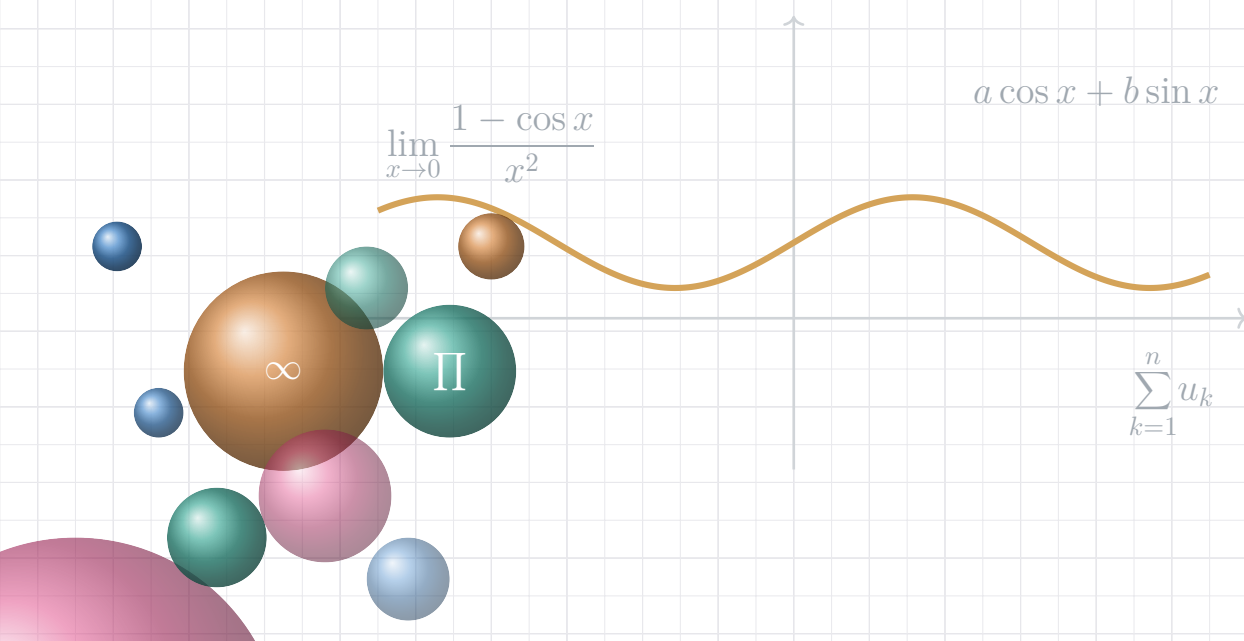
SCIENCES EXPÉRIMENTALES



Recueil d'Exercices Thématiques

Mathématiques

Première Année – Sciences Expérimentales





SÉRIES D'EXERCICES N° 5

NOTIONS DE LOGIQUE

1 Proposition - Fonction propositionnelle

- 1) Donner un exemple de proposition vraie.
- 2) Donner un exemple de proposition fausse
- 3) Déterminer pour chaque cas S l'ensemble des nombres réels pour lesquels la fonction propositionnelle est vraie :

a) : $x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x = 4$

b) : $x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x+3} \geq 3$

c) : $x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x$

2 Quantificateurs

Ecrire avec les quantificateurs chacune des propositions suivantes :

- 1) Le carré de tout nombre réel est un réel positif.
- 2) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
- 3) Il existe un nombre réel dont le carré vaut $\sqrt{2}$
- 4) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
- 5) Tout réel positif est le carré d'un unique réel positif
- 6) Tout nombre réel non nul admet un inverse ;
- 7) Tout nombre réel admet un opposé .

3 Négation d'une proposition

Ecrire avec les quantificateurs chacune des propositions suivantes :

- 1) l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$
- 2) Il n'existe aucun rationnel solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$

- 3) Il n'existe pas d'entier naturel supérieur ou égal à tous les autres

4 Raisonnement par contre exemple

Ecrire la négation des propositions suivantes et préciser laquelle est vraie :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n + 3^n = 5^n$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \leq x$

3) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{+2}, \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

5 Conjonction et disjonction

Soit x un réel . Traduire les propositions suivantes en utilisant la conjonction ou la disjonction

1) $-1 < x < 1$

2) $|x| \geq 3$

3) $|x| = 7$

4) $x \geq 5$

5) $x(x-1) \neq 0$

6) ABC est un triangle équilatéral

7) ABC est un triangle isocèle

6 Implication logique

- 1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$-1 \leq x \leq 3 \implies |-x+4| - |x-5| = -1$$

- 2) soient x et y deux réels quelconques . complétez par $\implies$ ou par $\Leftarrow$

a) $x = 2 \dots\dots\dots x^2 = 4$

b) $x = 2 \dots\dots\dots \sqrt{x^2} = 2$

c) $xy > 0 \dots\dots\dots (x > 0) \wedge (y > 0)$

d) $x = y \dots\dots\dots (x = 0) \wedge (y = 0)$

e) $x \leq y \dots\dots\dots x < y$

f) $x = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots \cos(x) = \frac{1}{2}$

g) $\sin(x) \geq 0 \dots\dots\dots x \in [0, \pi]$

7 Raisonnement par déduction

En utilisant le raisonnement déductif montrer que :

1) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{+2} : a + b \geq 2\sqrt{ab}$

2) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{+2} : \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

3) $\forall x \in (\mathbb{R}^*)^+ : \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$

8 Lois de De Morgan

Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner la négation des propositions suivantes ;

1) $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 < x \leq x^2$

2) $\forall x \in \mathbb{R} ; x > 1 \implies x \geq 2$

9 Raisonnement par Equivalence successives

En utilisant les équivalences successives :

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, x + \frac{1}{x} \geq 2)$

2) résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{x+6} = x$

b) $\sqrt{x} = x - 2$

10 Raisonnement par contraposée

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

1) $x + y \geq 1 \implies (x \geq \frac{1}{2}) \text{ ou } (y \geq \frac{1}{2})$

2) $x \neq y \implies (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

3) $(x \neq y) \wedge (xy \neq 1)$

$$\implies \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1}$$

4) $n^2 - 6n + 5$ pair $\implies n$ impair

11 Raisonnement par l'absurde

1)a) Rappeler la définition d'un nombre décimal

b) Rappeler le critère de divisibilité par 3

c) En raisonnant par l'absurde, démontrer que $\frac{1}{3}n$ n'est pas un nombre décimal

2) Montrer que l'équation $3x + 6y = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

3)a) Montrer que pour tout entier naturel n

$$n \text{ pair} \iff n^2 \text{ pair}$$

b) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

12 Raisonnement par disjonction des cas

Montrer que :

1) Pour tout entier naturel n ; $3n^2 + n + 14$ est pair

2) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-2| < x^2 - 2x + 3$

3) $\forall x \in \mathbb{R} : -5 \leq |x+2| - |x-3| \leq 5$

13 Raisonnement par récurrence

Montrer par récurrence ce qui suit :

1) Pour tout entier naturel n ,

le nombre $4^n + 5$ est divisible par 3.

2) Pour tout entier naturel n ,

le nombre $10^n - 1$ est divisible par 9.

3) Pour tout entier naturel non nul n ,

le nombre $3^n + 4^n - 1$ est divisible par 3

4) Pour tout entier naturel n ,

le nombre $4^{2n+2} - 15n - 16$ est divisible par 225

5) $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$

7) $\forall n \geq 2, 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$

8) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n + 1$

9) $\forall n \geq 5, 2^n > n^2$

10) $\forall n \geq 7, 2^n > n^2 + 4n + 5$

SÉRIES D'EXERCICES N° 2

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

1 Fonction majorée ; minorée ; bornée - Extrémums

1) On considère la fonction f définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |x+3| - |x-4|$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, -7 \leq f(x) \leq 7$

2) On considère la fonction :

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x + \frac{1}{x}$$

a) i) Montrer que :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, f(x) \leq -2$$

ii) -2 est-il le maximum de f sur $] -\infty, 0[$? (justifier votre réponse)

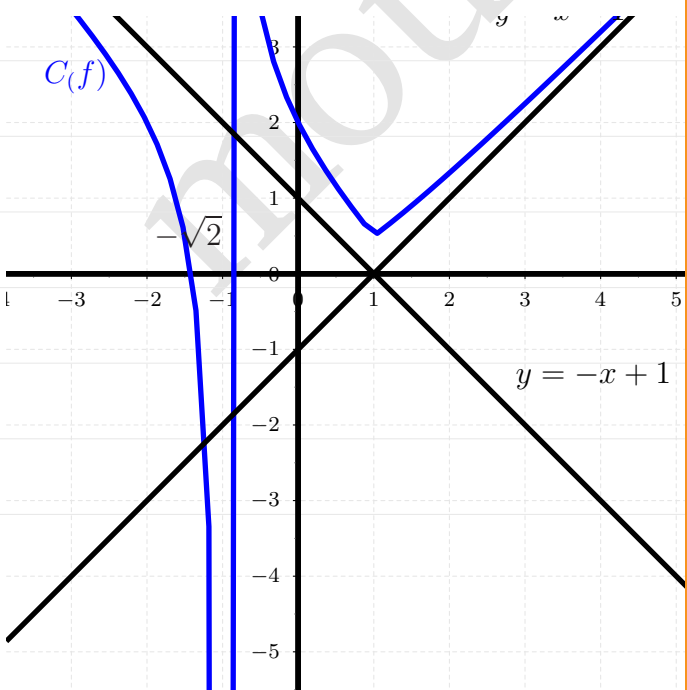
b) i) Montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) \geq 2$$

ii) 2 est-il le minimum de f sur $]0, +\infty[$? (justifier votre réponse)

2 Comparaison , Interprétation géométrique

On considère la fonction f définie par sa courbe représentée ci-dessous.



- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f
- 2) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = 0$
- 3) Résoudre graphiquement les inéquations :
 - a) $f(x) \leq 0$
 - b) $f(x) > -x + 1$
- 4) Donner graphiquement suivant les valeurs du réel m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

3 Composée de deux fonctions numériques

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$ et de $f \circ g$, puis calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ dans chacun des cas suivants :
 - a) $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$
 - b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x+3}$
 - c) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ et $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$
 - d) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ et $g(x) = \sqrt{4-x}$
- 2) Déterminer deux fonctions f et g tel que $F = g \circ f$ dans chacun des cas suivants
 - a) $F(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$
 - b) $F(x) = (2x-1)^2 + 3(2x-1) - 2$

4 Monotonie d'une fonction numérique - Monotonie de la composée

- 1) a) Montrer que la fonction $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$ est strictement décroissante sur $]3; +\infty[$ et sur $] -\infty; 3[$
 - b) La fonction $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$ est-elle strictement décroissante sur $] -\infty; 3[\cup]3; +\infty[$? (justifier votre réponse)
- 2) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2$ et $g(x) = x^2 - 1$

a) Etudier la parité de f

b) Calculer $f(1)$ puis montrer que :

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -1$$

c) i) Montrer que $f = g \circ g$

ii) En déduire les variations de f sur chacun des intervalles $I = [0; 1]$ et $I = [1; +\infty]$

d) En utilisant la parité de f , dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

5 les variations des fonctions $f + \lambda$ et λf

À partir des variations de f qui sont données par le tableau suivant :

x	-4	-2	0	2	3	4
$f'(x)$	-	+	-	-	+	
$f(x)$	4	1	3	0	-3	2

Déterminer le tableau de variations de g sur $]-4; 4[$ dans chacun des cas suivants

1) $g(x) = f(x) - 3$

2) $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

3) $g(x) = -3f(x)$

6 fonction périodique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$

périodique de période $T = 2$ tel que $\forall x \in [-1; 1] ; f(x) = 1 - x^2$

1) Construire $\mathcal{C}_f$ sur $[-3; 5]$

2) Calculer $f(2025)$

3) Calculer $f(x)$ pour tout x dans $[-1 + 2k; 1 + 2k]$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$

7 Représentation de $x \mapsto ax^3$ et de $x \mapsto \sqrt{x+a}$

1) Construire dans un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions :

a) $f : x \mapsto \frac{x^3}{8}$

b) $g : x \mapsto \left| \frac{x^3}{8} \right|$

c) $h : x \mapsto \sqrt{x+3}$

2) On considère dans l'équation :

$$(E) : x^6 - 64(x+3) = 0$$

a) Montrer que l'équation (E) n'admet pas de solution dans l'intervalle $]-\infty; -3]$

b) En utilisant les trois graphiques précédents, montrer que l'équation (E) admet deux solutions dans l'intervalle $]-3; +\infty[$

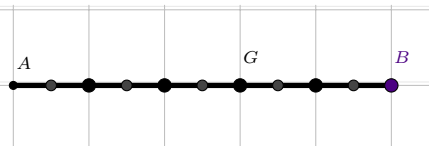


SÉRIES D'EXERCICES N° 3

LE BARYCENTRE DANS LE PLAN

1 Barycentre de deux points pondérés

- 1) En utilisant la figure ci-dessous, déterminer α et β dans chacun des cas suivants



- $G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
- $A = \text{bary}\{(G, \alpha); (B, \beta)\}$
- $B = \text{bary}\{(A, \alpha); (G, \beta)\}$

- 2) A et B deux points distincts tel que $AB = 10\text{cm}$

- a) Construire Les points :

- $C = \text{bary}\{(A, 2); (B, 3)\}$
- $D = \text{bary}\{(A, 3); (B, 2)\}$

- b) Déterminer et représenter E_1 l'ensemble des points M du plan tel que : $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 10$

- c) Déterminer et représenter E_2 l'ensemble des points M du plan tel que : $\|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|3\vec{MA} + 2\vec{MB}\|$

- d) Déterminer et représenter E_3 l'ensemble des points M du plan tel que : $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| \leq 4$

- 3) Dans un repère du plan, on donne les points $A(3; 2)$ et $B(-1; 4)$. $G = \text{bar}\{(A, 3); (B, -2)\}$ et $G' = \text{bar}\{(A, -2); (B, 3)\}$.

- Calculer les coordonnées de G et G'
- Vérifier que $[AB]$ et $[GG']$ ont même milieu

2 Barycentre de trois points pondérés

Soit ABC est un triangle quelconque .

- 1) Montrer que l'isobarycentre des trois points A ; B et C est le centre de gravité du triangle ABC

- 2) Les points I, J et K sont définis par :

$$\vec{AI} = \frac{5}{3}\vec{AC}, \vec{BJ} = \frac{5}{8}\vec{BC} \text{ et } \vec{AK} = 3\vec{AB}$$

- a) Exprimer I comme barycentre de A et C , J comme barycentre de B et C , et K comme barycentre de A et B .

- b) Soit G le barycentre de $(A, -2)$, $(B, 3)$ et $(C, 5)$.

- i) Montrer que G est le milieu de $[BI]$.

- ii) Montrer que les droites (CK) , (BI) et (AJ) sont concourantes en G .

- 3) On suppose que $AC = 12$; $BA = 10$; $BC = 8$

- a) Construire le barycentre G de $\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$

- b) Déterminer et représenter l'ensemble $(\mathcal{E}_1)$ des points M tels que

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = AC$$

- c) Soit $(\mathcal{E}_2)$ l'ensemble des points N tels que

$$\|\vec{NA} + 2\vec{NB} + \vec{NC}\| = \|\vec{NA} - 2\vec{NB} + \vec{NC}\|$$

- i) Montrer que le point B appartient à $(\mathcal{E}_2)$

- ii) Déterminer et représenter l'ensemble $(\mathcal{E}_2)$

- d) Déterminer et représenter l'ensemble $(\mathcal{E}_3)$ des points P tels que

$$\|\vec{PA} + 2\vec{PB} + \vec{PC}\| = \|3\vec{PA} - \vec{PB} + 2\vec{PC}\|$$

3 Barycentre de quatre points pondérés

$ABCD$ un carré de centre O de côté 4cm . Pour tout point M du plan, on pose $\vec{v} = \vec{MB} - \vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MD}$. G est le barycentre des points $\{(B, 1); (C, -4); (D, 1)\}$

- 1) Le système $\{(A, -1); (B, 1); (C, 1); (D, -1)\}$ admet-il un barycentre?

- 2) Montrer que pour tout point M du plan, on a $\vec{v} = 2\vec{AB}$

- 3) Montrer que G est le symétrique de O par rapport à C

- 4) Déterminer et représenter l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M tels que

$$\|\vec{MB} - 4\vec{MC} + \vec{MD}\| = \|\vec{MB} - \vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MD}\|$$

SÉRIES D'EXERCICES N° 4

ÉTUDE ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

1 Expression analytique

1) Dans le plan $\mathcal{V}_2$ muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = -2\vec{i}$ et $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$. Calculer : $\vec{v} \cdot \vec{u}$; $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v} - \vec{u}\|$

2) Soit ABC un triangle d'aire S et soit H le projeté orthogonale du point C sur (AB)

a) Montrer que : $S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin(\hat{A})$

b) En déduire que : $S = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})|$

3) Dans le plan (P) muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $E(-1, 2)$; $F(3, 5)$ et $G(6, 1)$

a) Calculer $\cos(\vec{EF}, \vec{EG})$ et $\sin(\vec{EF}, \vec{EG})$

b) En déduire la mesure principale de l'angle $(\vec{EF}, \vec{EG})$

c) Calculer l'aire du triangle EFG

2 Etude analytique de la droite dans le plan

1) Donner un vecteur normal à la droite D dans chacun des cas suivants :

a) $(D_1) = (ox)$

b) $(D_2) : 4y - 5 = 0$

c) $(D_3) : x = 3$

d) $(D_4) : y = x$

2) Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(-4, 10)$; $B(8, 16)$; $C(8, -2)$ et $K(5, 7)$

a) Déterminer une équation de la médiatrice

de $[AB]$

b) Déterminer une équation de la hauteur issue de A du triangle ABC

c) Calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC

d) Calculer les coordonnées du point $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$

e) Montrer que le point K est le centre du cercle passant par les sommets du triangle ABC

f) Montrer que les points G ; H et K sont alignés.

3) a) Déterminer la distance du point $A(x_A, y_A)$ à la droite (D) dans chacun des cas suivants :

i) $(D) = (ox)$ et $A(-1, 0)$

ii) $(D) : 4y - 5 = 0$ et $A(-2, 2)$

iii) $(D) : y = x$ et $A(1, 1)$

b) On considère les deux droites $(\Delta_1) : y = 0$ et $(\Delta_2) : x = 0$. Déterminer F l'ensemble des points M du plan tel que $d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2)$

3 Etude analytique du cercle dans le plan

1) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal. Déterminer une équation du cercle $(\mathcal{C})$ dans chacun des cas suivants

a) Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(-1, 0)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$

b) Le cercle ($\mathcal{C}$) de centre $\Omega(6, -8)$ et passe par O

c) Le cercle ($\mathcal{C}$) de diamètre $[AB]$ avec $A(2; 2)$ et $B(6; -2)$.

d) Le cercle ($\mathcal{C}$) passe par les deux points $A(-1; 3)$ et $B(3; 1)$ et son centre appartient à la droite (D) ; $3x - y - 2 = 0$.

2)a) Soit ($\mathcal{C}$) d'équation :

$$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{5} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{5} \sin \theta \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$$

i) Déterminer deux points appartenant au cercle ($\mathcal{C}$)

ii) Déterminer une équation cartésienne du cercle ($\mathcal{C}$)

b) On pose $A = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

i) Vérifier que $A \neq \emptyset$ et que $B \neq \emptyset$

ii) Montrer que $A = B$

3) Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan dans chacun des cas suivants

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

c) $x^2 + y^2 + y + 3 = 0$

d) $x^2 - y^2 = 0$

4) Déterminer la position relative du cercle ($\mathcal{C}$) et la droite (Δ) puis étudier leurs intersections dans chacun des cas suivants

a) ($\mathcal{C}$) ; $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ et (Δ) : $-2x + 3y = 0$

b) ($\mathcal{C}$) ; $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ et (Δ) : $x + 2y + 2 = 0$

c) ($\mathcal{C}$) ; $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 10 = 0$ et (Δ) : $x - 2y - 1 = 0$

5)a) Justifier que le point A appartient au cercle ($\mathcal{C}$) puis déterminer l'équation de sa tangente au point A

i) ($\mathcal{C}$) ; $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$ et $A(1; -2)$

ii) ($\mathcal{C}$) ; $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 18 = 0$ et $A(1; 3)$

iii) ($\mathcal{C}$) ; $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ et $A(\sqrt{3}; \sqrt{3})$

b) On considère le cercle ($\mathcal{C}$) d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

i) Déterminer le centre et le rayon du cercle ($\mathcal{C}$)

ii) Déterminer une représentation paramétrique du cercle ($\mathcal{C}$)

iii) Étudier l'intersection du cercle ($\mathcal{C}$) avec l'axe des abscisses

iv) trouver les équations des deux droites tangentes au cercle ($\mathcal{C}$) et ayant $\vec{n}(1, 2)$ comme vecteur normal

v) trouver les équations des deux droites tangentes au cercle ($\mathcal{C}$) et passant par le point $A(1, 0)$



SÉRIES D'EXERCICES N° 5

CALCUL TRIGONOMETRIQUE

1 Formules de transformations

1) A l'aide des formules d'addition et de duplication, déterminer les valeurs des lignes trigonométriques des angles $\frac{\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{24}$

2) On donne $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$;
calculer $\cos \frac{2\pi}{5}$ puis $\cos \frac{3\pi}{5}$

3) Calculer $\sin a$; $\sin b$; $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$
sachant que $\cos a = \frac{1}{2}$; $\cos b = -\frac{1}{2}$; $0 < a < \frac{\pi}{2}$
et $0 < b < \pi$

4) Calculer $\cos a$; $\cos b$; $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$
sachant que $\sin a = \frac{2}{5}$; $\sin b = -\frac{3}{5}$; $0 < a < \frac{\pi}{2}$
et $\frac{\pi}{2} < b < \pi$

5) a) Démontrer que

$$\forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[, \tan x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

b) En déduire les valeurs exactes

$$\tan \frac{\pi}{8} \text{ et } \tan \frac{\pi}{12}$$

2 Transformation de produits en sommes

Montrer que pour tous réels x et y , on a :

1) $\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

2) $\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = \cos^2 y - \sin^2 x$

3) $\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$

4) $\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$

3 Transformation de sommes en produits

Soit x un nombre réel.

1) Ecrire sous forme de produit

$$\cos x + \cos 7x \text{ et } \cos 3x + \cos 5x$$

2) En déduire que : $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$
 $= 4 \cos x \cos 2x \cos 4x$

4 Transformation de l'expression : $a \cos x + b \sin x$

1) Montrer que $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{18}} - \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{18}} = 4$

2) Montrer que $\frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{9}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{9}} = 4$

3) Montrer que $\frac{\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2}$

4) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \leq \cos x + \sin x \leq \sqrt{2}$$

5 Equation et inéquation trigonométrique

1) On pose $A(x) = \sin(3x) + \sin(x) + 4\sqrt{3} \cos^3(x)$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\sin(3x) + \sin(x) = 4 \sin(x) \cos^2(x)$$

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$A(x) = 4 \cos^2(x) (\sqrt{3} \cos x + \sin x)$$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 0$$

d) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $A(x) = 0$
puis représenter les solutions dans le cercle trigonométrique

2) On considère l'équation :

$$(E) : \cos(2x) + \cos(3x) = 0$$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)

b) Résoudre dans $[-\pi; \pi[$ l'équation (E)

c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} ,$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$

d) En déduire que $(E) \iff$

$$4 \cos^3(x) + 2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) - 1 = 0$$

e) Vérifier que $P(X) = 4X^3 + 2X^2 - 3X - 1$
 $= (X+1)(4X^2 - 2X - 1)$

f) En déduire les solutions de l'équation
 $P(X) = 0$

g) En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{5}$

3) Résoudre dans l'intervalle $[0; \pi]$ l'inéquation

$$(I) : \sqrt{2} \cos x + \sqrt{6} \sin x \geq 2$$

4) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation

$$(I) : \cos^2 \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) - \sin^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right) < \frac{1}{4}$$



SÉRIES D'EXERCICES N° 6

SUITES NUMÉRIQUES

1 Généralités sur les suites numériques

1) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{8} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{2}{3}$$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n + \sin(n)$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

c) $\forall n \geq 5, u_n = n^2 - 10n + 26$

d) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} \end{cases}$$

a) Calculer u_1

b) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

c) i) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

ii) En déduire la monotonie de la suite (u_n)

d) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

e) i) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$

ii) En déduire u_n en fonction de n pour tout

n de $\mathbb{N}$.

f) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0; 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}} \end{cases}$$

i) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$

ii) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

iii) On suppose que $u_0 = \cos(\varphi)$ tel que $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

iv) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$

2 Suites arithmétiques

1) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{3 - u_n} \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$

b) i) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$

ii) En déduire la monotonie de la suite (u_n)

c) On pose $v_n = \frac{1}{1 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

i) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

ii) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \frac{n+1}{n+3}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

iii) Écrire la somme $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n

2) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ S_n = \sum_{k=1}^n v_k = 2(n^2 + n) ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Calculer les quatre premiers termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

b) Calculer v_n en fonction de n

c) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique (Préciser sa raison et son premier terme)

3) Calculer les sommes :

a) $S_1 = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2018$

b) $S_2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2019$

c) Calculer la somme des multiples de 7 compris entre 1890 et 2024

4) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = 10$ et de premier terme $u_1 = 1$. Calculer l'entier naturel n (s'il existe) tel que $\sum_{k=1}^n u_k = 2121$

3 Suites géométriques

1) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) i) Calculer u_2 et u_3

ii) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas géométrique

b) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = u_{n+1} - u_n$$

i) Calculer v_0 et v_1

ii) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique (Préciser sa raison et son premier terme)

iii) Ecrire v_n en fonction de n

iv) Ecrire la somme $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ en fonction de n

v) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 7 - \frac{3}{2^n}$

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5} \end{cases}$$

a) Calculer u_1

b) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$

c) i) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

ii) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{3}{2}(\frac{2}{5})^n$

d) On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

i) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$

ii) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

SÉRIES D'EXERCICES N° 7

LA ROTATION

1 Définition d'une rotation

Soient ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$; D le symétrique de A par rapport à la droite (BC) et D' le symétrique de D par rapport à C .

- 1) Quelle est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$? (justifier la réponse)
- 2) Quelle est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$? (justifier la réponse)
- 3) Déterminer le centre de la rotation r qui transforme A en B et transforme B en C

2 Propriétés d'une rotation

1) On considère un parallélogramme $ABCD$ de sens direct.

a) Construire le triangle IAD rectangle et isocèle en I tel que $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et le triangle DCE rectangle isocèle en D tel que $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

i) Déterminer l'image de A par la rotation r

ii) Montrer que $r(B) = E$

c) Soit A' le symétrique de A par rapport à I

i) Justifier que $r(D) = A'$

ii) Montrer que $A'E = BD$ et que les droites $(A'E)$ et (BD) sont perpendiculaires.

2) ABC est un triangle rectangle et isocèle sommet A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

a) Construire le point A' l'image de A par la

rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$

b) Construire le point C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$

c) Montrer que les points A ; A' et C' sont alignés

3) $ABCD$ est un parallélogramme de centre O tel que $AB \neq AD$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit E le point du plan tel que CED est un triangle équilatéral direct.

a) Faire une figure

b) i) Montrer qu'il existe une rotation r qui transforme A en E et B en D

ii) Déterminer son angle et construire son centre I

c) La droite (EC) coupe la droite (AB) en F

i) Montrer que $D \in [AE]$

ii) Montrer que le triangle AFE est équilatéral direct.

iii) Montrer que $r(F) = A$

iv) En déduire que le point I est le centre du cercle circonscrit au triangle AEF

d) soit r' la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

i) Déterminer $r'(D)$ et $r'(F)$

ii) En déduire que les droites (FD) et (BE) sont sécantes en un point J

iii) Montrer que $(\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JB}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

e) On désigne par $(\mathcal{C}')$ le cercle circonscrit au triangle ABD . Montrer que le cercle $(\mathcal{C}')$ passe par les points I et J



SÉRIES D'EXERCICES N° 8

LIMITE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

1 Limites de référence

1) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x > 0 \\ -2, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Déterminer la limite de f en 2

b) Déterminer la limite à droite et à gauche de 0

c) La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

2) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ x^3, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$

3) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^3}$

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x^2}$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} |x|$

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1}$

f) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{1-x}$

2 Limites de fonctions polynômiales ; rationnelles

et limites de $\sqrt{f}$; f étant une fonction usuelle

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2|x|}{x}$

a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f

b) Déterminer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$

2) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{4}{3x-1} - \frac{1}{2}}{x - 3}$

f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{4 - \sqrt{x+13}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^4 - 5x - 6}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x+1}}$

i) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$

j) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} - \sqrt{x-2}}{x^2 - 4}$

k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + x - 3}{2x^2 + 3x - 5}$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1}$

m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9+4x^2}}{x+3}$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5} + 5x}{3x+4}$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1}}{x^2 - 1}$

p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x)$

q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - \sqrt{4x^2 - 2})$

r) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 + x + 3})$

3 Limites de fonctions trigonométriques

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(3x)}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{5x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(5x)}{x^2}$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 2x - 3}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos x}{x^2}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x^2}{x \sin x}$

10) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan(\pi x)}{x + 2}$

11) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \frac{\cos(2x) - \sin(2x)}{x - \frac{\pi}{8}}$

12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$

13) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$

15) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{5x+11} - 1}{\sin(x+2)}$

16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\sin^3 x}$

17) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{2} \cos^2 x}$

18) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)}{1 + \cos(\pi x)}$

19) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cos x - 1}$

20) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(2x)(1 - 2 \sin x)}{2(\pi - x)}$

21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

4 Limites et Ordre

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \sin x)$

4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\cos(x)}{x}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + 1}$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos(x)}{\sqrt{x}}$

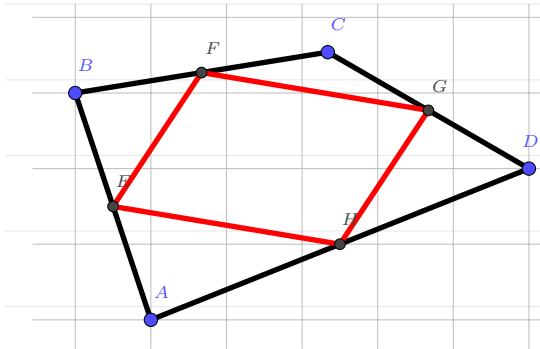
8) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(x) - \sin(2x)}{x^2}$

SÉRIES D'EXERCICES N° 9

VECTEURS DE L'ESPACE

1 Calcul vectoriel dans l'espace

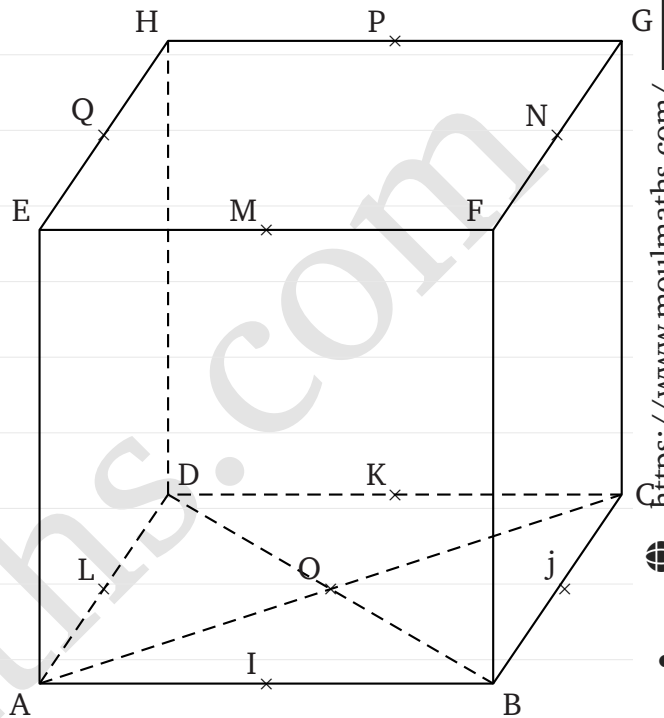
- 1) Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque les points E ; F ; G et H sont les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$ et $[DA]$. Montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.



- 2) Soit $ABCDEFGH$ un cube. les points I ; J ; K ; L ; M ; N ; P et Q sont les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$ $[DA]$; $[EF]$; $[FG]$; $[HG]$ et $[EH]$. Le point O est le centre de la face $ABCD$. Compléter les égalités suivantes avec les points convenables :

- a) $\overrightarrow{D.....} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$
 b) $\overrightarrow{A.....} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$
 c) $\overrightarrow{K.....} = \overrightarrow{GF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BN}$
 d) $\overrightarrow{B.....} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$
 e) $\overrightarrow{.....H} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

f) $\overrightarrow{.....B} = 2\overrightarrow{LO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HE} - \overrightarrow{AE}$



2 Vecteurs colinéaires

- 1) Soit $ABCDEFGH$ un cube.

- a) Construire les points M ; N et P tels que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

- b) Montrer que les points M ; N et P sont alignés..

- 2) Soit $ABCD$ un tétraèdre. les points I ; J ; K et L sont tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

a) Faire une figure

b) Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

3) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Montrer en utilisant un raisonnement par l'absurde que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0} \implies \alpha = \beta = 0$$

3 Vecteurs coplanaires

1) Soit $ABCD$ un tétraèdre. les points P ; Q ; R

et S sont tels que : $\vec{AP} = \frac{2}{5}\vec{AB}$; $\vec{BQ} = -3\vec{BC}$;

$$\vec{CR} = \frac{5}{3}\vec{CD} \quad \vec{DS} = \frac{4}{9}\vec{DA}$$

a) Faire une figure

b) Exprimer $\vec{PQ}$; $\vec{PR}$ et $\vec{PS}$ en fonction de $\vec{AB}$; $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$

c) Montrer que $\vec{PQ}$; $\vec{PR}$ et $\vec{PS}$ sont coplanaires

2) Soit $ABCD$ un tétraèdre. les points I et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$

et $[CD]$. Les points J et L sont tels que :

$$\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC} \quad \text{et} \quad \vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AD}$$

a) Faire une figure

b) Exprimer $\vec{IJ}$; $\vec{IK}$ et $\vec{IL}$ en fonction de $\vec{AB}$; $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$

c) Les points I ; J ; K et L sont-ils coplanaires ? justifier la réponse

SÉRIES D'EXERCICES N° 10

DÉRIVATION

1 Dérivabilité en un point

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point demandé

1) $f(x) = \frac{3x-1}{2x-5}$ et $x_0 = 2$

2) $f(x) = |x^2 - 2x|$

(à droite et à gauche en $x_0 = 2$)

3) $f(x) = \begin{cases} -1 - 4x, & \text{si } x < -1 \\ x^4 + 2, & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$
 $x_0 = -1$

4) $f(x) = x\sqrt{x}$

(à droite en $x_0 = 0$)

5) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

(à droite en $x_0 = -1$ et à gauche en $x_0 = 1$)

2 Interprétations géométriques - Approximation

affine en un point

1) On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$

a) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu

b) Donner l'approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 0$

c) En déduire une valeur approchée pour chacun des deux nombres $\sqrt{1,000462}$ et $\sqrt{0,996}$

2) Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point demandé puis interpréter

graphiquement les résultats obtenus.

a) $f(x) = |x^2 - 2x|$ et $x_0 = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x-1} \sin(x-1);$

(à droite en $x_0 = 1$)

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2};$

(à gauche en $x_0 = 1$)

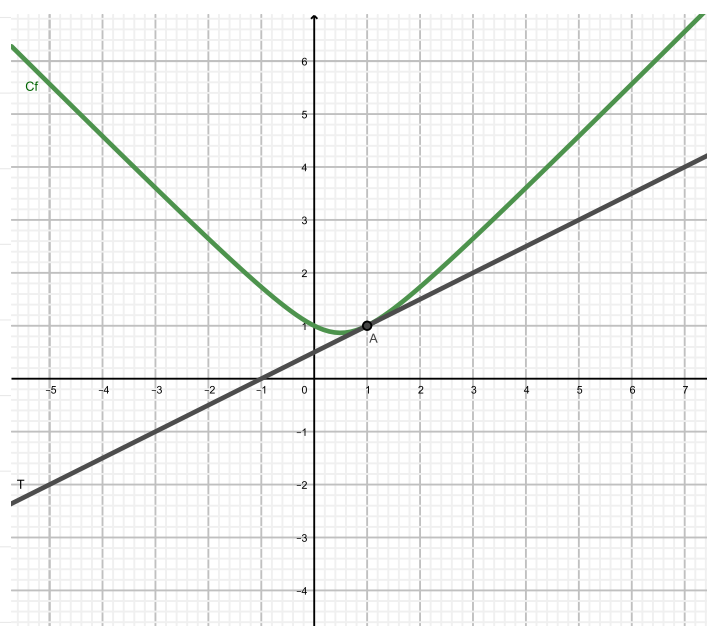
d) $f(x) = \cos(\sqrt{x});$

(à droite en $x_0 = 0$)

e) Sur figure ci-dessous la droite (T) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f en A

i) Déterminer une équation cartésienne de (T)

ii) En déduire $f'(1)$



3 Nombre dérivé

En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x-5)^{2025} - 1}{x^2 - 4}$

4 Monotonie et signe de la dérivée - dérivées successives

1) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer $\mathcal{D}_f$; $\mathcal{D}_{f'}$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x dans $\mathcal{D}_{f'}$ et dresser le tableau de variation de f

a) $f(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2$

b) $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$

c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

d) $f(x) = x - \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x-1}$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(x) - x + \frac{1}{6}x^3$$

a) Calculer $f'(x)$; $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$: $f'(x) \geq 0$
 $f''(x) \geq 0$ et $f^{(3)}(x) \geq 0$

c) Montrer que :

i) $\forall x \geq 0, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$

ii) $\forall x \geq 0, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$

3) Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I tel que $f'' + f = 0$

Montrer la fonction $\varphi = f^2 + f'^2$ est constante sur I

4) Soit f la fonction définie sur $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ par :
 $f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$

a) Montrer que le signe de $f'(x)$ sur I est celui de $2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1$

b) Soit g la fonction définie sur $J =]0, 1]$ par
 $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

i) Etudier le signe de g sur J puis en déduire celui de f sur I

ii) En déduire que :

$$\forall x \in I, 2 \sin x + \tan x \geq 3x$$

5 Extrémum d'une fonction dérivable

Déterminer les extremums de f s'il existent dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

2) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x - 2$

3) $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$

6 Equation différentielle du type $y'' + w^2 y = 0$

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $(E_1) : y'' + y = 0$

b) $(E_2) : 2y'' + 3y = 0$

c) $(E_3) : 4y'' + y = 0$

2) Déterminer la solution de l'équation (E_3) qui vérifie $y(\pi) = 1$ et $y'(\pi) = -1$



SÉRIES D'EXERCICES N° 11

ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

1 Asymptotes verticales - Asymptotes horizontales

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 6}{x^2 - 10x + 24}$$

- 1) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f
- 2) Calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$ ensemble de définition de f ; puis donner, s'ils existent les équations des asymptotes parallèles aux axes

2 Asymptote Oblique

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$

- 1) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f
- 2) Déterminer les réels a ; b et c tels que $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$
- 3) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b))$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b))$; puis interprétez les résultats obtenus

3 Directions asymptotiques

Dans chacun des cas suivants, déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f ; calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$ puis étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$

- 1) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x + 2}$
- 2) $f(x) = 2x - \sqrt{x}$
- 3) $f(x) = \frac{2x^3}{(2x - 1)^2}$
- 4) $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$

4 Concavité d'une courbe - point d'inflexion

Dans chacun des cas suivants, déterminer

$\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f ; étudier la convexité de $\mathcal{C}_f$ puis préciser lorsque $\mathcal{C}_f$ admet des points d'inflexions

- 1) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$
- 2) $f(x) = x^5 - 5x^4$
- 3) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$

5 Éléments de symétrie de la courbe d'une fonction

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$

a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f

b) Montrer la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f

b) Montrer point $A(-1, -2)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$

6 Exemples d'études de fonctions

1) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$$

a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f

b) Déterminer les réels a ; b et c tels que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$



c) Calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$ puis étudier les branches infinies de f et préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote oblique.

d) Calculer $f'(x)$ pour tout x dans $\mathcal{D}_f$; étudier son signe puis dresser le tableau de variation de f

e) Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet le point $\Omega(2, 3)$ pour centre de symétrie.

f) Calculer $f''(x)$ pour tout x dans $\mathcal{D}_f$; étudier son signe puis étudier la convexité de $\mathcal{C}_f$ et préciser si $\mathcal{C}_f$ admet des points d'inflexions

g) Déterminer les équations des deux tangentes (T_1) et (T_2) à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectifs -2 et 3

h) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

i) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$

2) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = |x - 1| + \frac{1}{x + 1}$$

a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f

b) Calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

c) Étudier les branches infinies de la courbe représentative de f et préciser sa position relative par rapport à ses asymptotes obliques

d) Étudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

e) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$

f) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 1[-\{-1\}$

g) Dresser le tableau de variation de f

h) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

i) Discuter suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

3) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = |x|\sqrt{x^2 - 1}$$

a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f

b) Étudier la parité de f puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

d) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$; étudier son signe puis dresser le tableau de variation de f

e) Étudier les branches infinies de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$

f) i) Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$

ii) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite $(D) : y = x$ sur l'intervalle $] -\infty, -3]$

g) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé



SÉRIES D'EXERCICES N° 12

ÉTUDE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

7 Coordonnées d'un point dans un repère

Soient $A(-3, 2, 1)$; $B(2, -2, 0)$; $C(-1, -1, 4)$ et $D(x, y, z)$ quatre points de l'espace $(\mathcal{E})$ muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- 1) Déterminer les coordonnées du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- 2) Déterminer les coordonnées du point G tel que $\vec{GA} + \vec{GB} - 3\vec{GC} = \vec{0}$

8 Colinéarité de deux vecteurs

On considère les points $A(0, 4, -1)$; $B(3, 2, 3)$; $C(1, -1, 6)$ et $D(-\frac{1}{2}, 0, 4)$. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

9 Vecteurs coplanaires

- 1) Les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires dans chacun des cas suivants
 - a) $\vec{u}(1, -2, 1)$; $\vec{v}(1, 1, -1)$; $\vec{w}(7, -4, 1)$
 - b) $\vec{u}(2, 1, -1)$; $\vec{v}(1, -3, 2)$; $\vec{w}(7, 0, 4)$
 - c) $\vec{u}(1, 0, 1)$; $\vec{v}(8, 3, -5)$; $\vec{w}(6, 3, -7)$
- 2) Les points A ; B et C et D sont-ils coplanaires dans chacun des cas suivants
 - a) $A(2, 3, 2)$; $B(-2, 1, 3)$; $C(0, 2, 4)$ et $D(4, 0, -3)$
 - b) $A(-2, -1, 0)$; $B(6, 0, 2)$; $C(-1, -2, 1)$ et $D(1, 1, -2)$

10 Représentation paramétrique d'une droite

- 1) Déterminer une représentation paramétrique de l'axe des abscisses
- 2) Déterminer une représentation paramétrique de l'axe des ordonnées
- 3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) dans chacun des cas suivants
 - a) (D) passe par les points $A(2, 0, 1)$ et $B(-3, -4, 1)$
 - b) (D) passe par le point $A(1, -1, 2)$ et

parallèle à l'axe des ordonnées

- 4) Soit (D) la droite définie par

$$(D) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

- a) Donner les coordonnées de deux points appartenant à (D)
- b) Le point de coordonnées $(-5, 9, 4)$ appartient-il à (D) ? (Justifier la réponse)
- c) Donner un vecteur directeur de (D)
- d) Donner le vecteur directeur de (D) de cote 7

11 positions relatives de deux droites

On munit l'espace d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Soient les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 - \frac{1}{2}t \\ z = \frac{3}{2}t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{et } \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = -7 - 4t' \\ y = 3 + 2t' \\ z = \frac{1}{2} - 6t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R}) \text{ . Montrer que les droites } (\mathcal{D}_1) \text{ et } (\mathcal{D}_2) \text{ sont strictement parallèles.}$$

- 2) Soient les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{et } \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = -3t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$$

- a) Démontrer que les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont sécantes
- b) Préciser les coordonnées du point A leur

point d'intersection.

12 Représentation paramétrique d'un plan

Déterminer une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P})$ dans chacun des cas suivants

- 1) $(\mathcal{P})$ passe par les points $A(2, 0, 1)$ et dirigé par $\vec{u}(1, 1, 1)$ et $\vec{v}(2, -1, 3)$
- 2) $(\mathcal{P})$ passe par les points $A(1, 1, 1)$; $B(2, 2, 1)$ et $C(-1, 3, 0)$
- 3) $(\mathcal{P})$ passe par le point $A(7, 2, -5)$ et parallèle aux axes (oy) et (oZ)

13 Equation cartésienne d'un plan

1) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ dans chacun des cas suivants

- a) $(\mathcal{P}) = (oxy)$
- b) $(\mathcal{P})$ passe par les points $A(-1, 1, -1)$ et dirigé par $\vec{u}(1, 0, 2)$ et $\vec{v}(3, -2, 4)$
- c) $(\mathcal{P})$ passe par les points $A(3, -2, 2)$; $B(6, 1, 5)$ et $C(6, -2, -1)$

2) Déterminer une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P}) : 2x + 3y - z + 2$

14 Positions relatives de deux plans

1) On considère les plans $(\mathcal{P}_1) : x + 2y - z + 1 = 0$ et $(\mathcal{P}_2) : 3x + 4y - 2z + 5 = 0$

- a) Montrer que les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants suivant une droite $(\mathcal{D})$
 - b) Donner une représentation paramétrique de droite $(\mathcal{D})$
 - c) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ est contenue dans le plan $(\mathcal{P}) : 2x + 6y - 3z = 0$
- 2) On considère les points $A(1, 1, 0)$; $B(1, 2, 1)$ et $C(3, -1, 2)$
- a) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés
 - b) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation : $2x + y - z - 3 = 0$
 - c) On considère les plans $(\mathcal{P}) : x + 2y - z - 4 = 0$ et $(\mathcal{Q}) : 2x + 3y - 2z - 5 = 0$. Démontrer que

les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont sécants suivant la

$$\text{droite } \mathcal{D} : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3) Déterminer l'intersection des trois plans (ABC) ; $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$

15 Deux équations cartésiennes d'une droite

1) Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite $(\mathcal{D})$ dans chacun des cas suivants

- a) $(\mathcal{D}) = (ox)$
- b) $(\mathcal{D}) = (oy)$
- c) $(\mathcal{D})$ passe par les points $A(-1, 2, 1)$ et $B(3, -2, 0)$
- d) $(\mathcal{D})$ passe par le point $A(1, -1, 2)$ et parallèle à l'axe des abscisses

2) Le système $x = y = z$ définit-il une droite $(\mathcal{D})$? si oui donner sa représentation paramétrique

3) Le système $(S) : \begin{cases} 2x - y - z + 7 = 0 \\ x = 5 \end{cases}$ définit-il une droite $(\mathcal{D})$? si oui donner sa représentation paramétrique

16 Positions relatives d'une droite et d'un plan

1) On considère les points $A(1, 1, 5)$; $B(-1, -3, 4)$ et le plan $(\mathcal{P}) : 2x - 2y + z - 2 = 0$

- a) Montrer que (AB) et $(\mathcal{P})$ ne sont pas parallèles
 - b) Déterminer les coordonnées du point K intersection de (AB) et $(\mathcal{P})$
- 2) On considère les points $A(1, 0, 4)$; $B(2, 3, 0)$; $C(-1, 2, 0)$; $D(10, 2, 3)$ et $E(15, 5, 1)$
- a) Justifier que les points A ; B et C définissent un plan
 - b) Démontrer que la droite (DE) est parallèle au plan (ABC)

moulmaths.com

