

2^{ème} BAC
SCIENCES EXPÉRIMENTALES

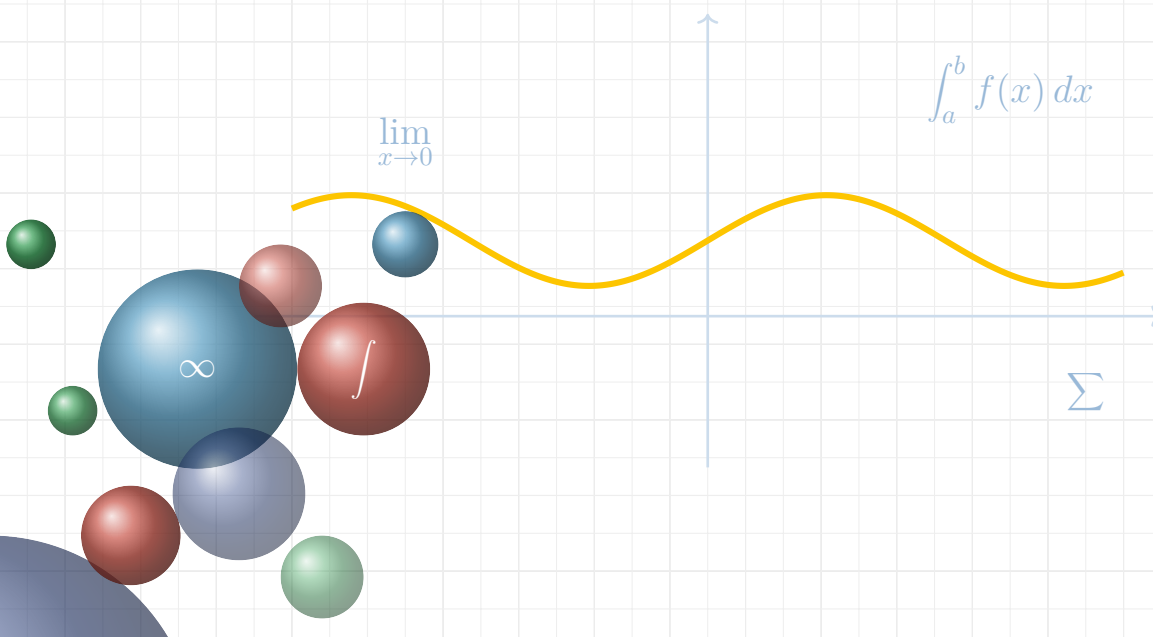


CAHIER SCOLAIRE

Devoirs

À LA MAISON

Mathématiques



DEVOIR À LA MAISON N°1

À RENDRE LE > ___ / ___ / ___

EXERCICE N°1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & ; x \geq 1 \\ x^3 - 3x^2 + 1 & ; x < 1 \end{cases}$$

- Calculer $f(1)$
- Étudier la continuité de f en 1
- Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.
- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$
 - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 1[$
 - Dresser le tableau de variation de f
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]1, +\infty[$
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β sur l'intervalle $]0, 1[$
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique γ sur l'intervalle $] -\infty; 0]$

EXERCICE N°2

- Sans utiliser de calculatrice, donner un encadrement du nombre $\sqrt[4]{599}$ par deux nombres entiers naturels consécutifs.
- Classer les nombres suivants par ordre croissant : $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{4}$ et $\sqrt[5]{5}$
- Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 8}$

4. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $x^2 - 4x - 5 = 0$
- $x^8 - 4x^4 - 5 = 0$

EXERCICE N°3

1. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = x^3 + 2x - 1$$

- Étudier les variations de g , et dresser son tableau de variation
 - Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle \mathbb{R}
 - Vérifier que $0 < \alpha < 1$
 - Déterminer le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} suivant les valeurs de x
 - Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $2x < 1 - x^3$
 - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur \mathbb{R}
 - Vérifier que g^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $(g^{-1})'(0)$
2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par
- $$f(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 11$$
- Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ pour tout x dans \mathbb{R} ; puis étudier son signe en fonction de α
 - Établir le tableau de variations de f sur \mathbb{R}

DEVOIR À LA MAISON N°2

À RENDRE LE > ___ // ___ // ___

EXERCICE N° 1

On considère la suite (u_n) définie par :
 $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2 + u_n}$, pour tout entier naturel n

1. a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2 + u_n}$

b) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}; 0 < u_n < 2$$

2. a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{(1 + u_n)(2 - u_n)}{2 + u_n}$$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire que (u_n) est convergente.

c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$$

d) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^n$

e) Déterminer la limite de la suite (u_n)

EXERCICE N° 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x + 2}{x + 2} & ; x \geq -1 \\ f(x) = -2 + \sqrt{x^2 + x + 1} & ; x < -1 \end{cases}$$

1. a) Étudier la continuité de f en -1

b) Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et Interpréter géométriquement le résultats obtenu .

c) Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

d) Montrer la courbe représentative de f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique dont on précisera l'équation.

e) Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en -1 et Interpréter géométriquement les résultats obtenus .

f) i. Calculer $f'(x)$ pour tout x dans $]-\infty; -1[$ et déterminer son signe .

ii. Calculer $f'(x)$ pour tout x dans $]-1; +\infty[$ et déterminer son signe .

iii. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R}

g) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \text{ avec } g \text{ est la restriction de } f \text{ à }]-1; +\infty[$$

a) Vérifier que $g(]0; 2[) \subset]0; 2[$

b) Montrer que $\forall x \in]0; 2[g(x) \geq x$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < u_n < 2$ et que la suite (u_n) est croissante

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite

EXERCICE N° 3

Dans chaque cas , déterminer la primitive F de la fonctions f sur l'intervalle I , vérifiant la condition indiquée.

1. $f(x) = 3x^2(x^3 + 2)$; $F(-1) = \frac{1}{2}$ et $I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{(x + 1)^3}$ $F(0) = 1$ et $I =]-1; +\infty[$

3. $f(x) = \sin^3(x)$ et $I =]0; +\infty[$ $F(0) = 2$ et $I = \mathbb{R}$

DEVOIR À LA MAISON N°3

À RENDRE LE > ___ / ___ / ___

EXERCICE N°1

1. On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$

- Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$
- En déduire les variations de g sur $]0, +\infty[$
- Calculer $g(1)$ puis en déduire que $\forall x \in]0; 1]$, $g(x) \leq 0$ et que $\forall x \in [1; +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

2. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$ et soit (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (d'unité 1cm)

- Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0$ (poser $t = \sqrt{x}$), puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
- Déterminer la branche infinie de (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$
- Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ puis en déduire que la fonction f est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$
- Dresser le tableau de variation de f puis en déduire que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) \geq 2$
- Tracer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (\mathcal{C}_f) . (On admet que (\mathcal{C}_f) admet un point d'inflexion unique sa précision n'est pas demandée)

EXERCICE N°2

1. On considère le nombre complexe z tel que $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

- Déterminer la forme algébrique de z^2
- Déterminer la forme trigonométrique de z^2 et en déduire le module et un argument de z
- En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

2. On considère le nombre complexe a tel que $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

- Montrer que le module du nombre complexe a est $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
- Vérifier que $a = 2(1 + \cos \frac{\pi}{4}) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$
 - En linéarisant $\cos^2 \theta$, θ est un nombre réel, montrer que $1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$
 - Montrer que : $a = 4 \cos^2 \frac{\pi}{8} + 4i \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$
On rappelle que $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
 - Montrer que $4 \cos \frac{\pi}{8} (\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$ est une forme trigonométrique du nombre complexe a puis montrer que $a^4 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^4 i$

3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, considère les points Ω et A d'affixes respectives ω et a telles que $\omega = \sqrt{2}$ et $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

- Montrer que l'affixe b du point B image du point A par la rotation R est $b = 2i$
- Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tels que $|z - 2i| = 2$
- Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tels que $|\sqrt{2}z - 2| = \sqrt{2}|z - 2i|$

DEVOIR À LA MAISON N°4

À RENDRE LE > ___ // ___ // ___

EXERCICE N°1

1. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = (2 - x)e^x - 1$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$
- Dresser le tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$.
- Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]1; 2[$ tel que $g(\alpha) = 0$
- Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$

2. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

- En utilisant les variations de la fonction $h : x \rightarrow e^x - x$ sur $]0; +\infty[$, vérifier que : $\forall x \in]0; +\infty[$, $e^x - x > 0$
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat
- Montrer que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$$

- Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$
- Vérifier que $e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$.

f) En déduire que le maximum de f sur $]0; +\infty[$ est $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$

g) Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prend $\alpha \approx 1.84$ et $f(\alpha) \approx 1.19$).

h) Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$.

EXERCICE N°2

1. a) Déterminer la solution générale de l'équation : $(E) : y' + 3y = 2$.

b) Déterminer la solution de l'équation (E) vérifiant $y(0) = 1$.

2. a) Déterminer la solution générale de l'équation :

$$(F) : y^{(2)} - 2y' + 2y = 0 .$$

b) Déterminer la solution de l'équation (F) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = -3$

EXERCICE N°3

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 + 2x - 3 = 0$

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $f(x) = 0$, puis Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

2. Calculer l'intégrale $\int_0^2 |f(x)| dx$.

DEVOIR À LA MAISON N°5

À RENDRE LE > ___ / ___ / ___

EXERCICE N°1

Dans l'espace (\mathcal{E}) rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère les points : $A(-2, 2, 8)$; $B(6, 6, 0)$; $C(2, -1, 0)$ et $D(0, 1, -1)$.

Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

1. Vérifier que les points O ; C et D ne sont pas alignés
2. Trouver un vecteur normal au plan (OCD) puis déterminer une équation cartésienne de ce plan .
3. Prouver que l'ensemble (S) est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon
4. a) Calculer la distance du point Ω au plan (OCD)
b) En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère (S)
c) Calculer $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$
d) En déduire l'intersection $(S) \cap (OCD)$ du plan (OCD) et de la sphère (S)
5. Démontrer que l'ensemble (F) des points M de l'espace tels que : $MA = MB$ est un plan (\mathcal{P}) dont déterminera une équation cartésienne
6. Vérifier que $(\mathcal{P}) \perp (OCD)$
7. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection des deux plans (\mathcal{P}) et (OCD)

8. Démontrer que l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 12$ est une sphère (S') dont déterminera le centre et le rayon

9. Montrer que le plan (OCD) coupe la sphère (S') suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon

EXERCICE N°2

On considère f et g définies sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$. (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal d'unité graphique $1cm$ en abscisse et $1cm$ en ordonnées .

On pose $I = \int_1^e f(x) dx$ et $J = \int_1^e g(x) dx$

1. a) Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'équation : $f(x) = g(x)$
b) Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$
2. a) Vérifier que $F : x \mapsto F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$
b) En déduire I
3. a) Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que $J = e - 2I$
b) En déduire J
4. Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine limité par (\mathcal{C}_f) , (\mathcal{C}_g) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

DEVOIR À LA MAISON N°6

À RENDRE LE > ___ // ___ // ___

EXERCICE N°1

Dans l'espace (\mathcal{E}) rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère Dans l'espace (\mathcal{E}) muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : $A(1, 2, 3)$; $B(3, 0, -3)$ et $C(5, 2, 6)$

1. Déterminer Les coordonnées du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ dans la base $B = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
2. Calculer l'air du triangle ABC
3. Calculer la longueur de la hauteur du triangle ABC issue de B
4. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

EXERCICE N°2

2 Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : trois boules rouges portant chacune le nombre 1 et trois boules rouges portant chacune le nombre 2 et six boules vertes portant chacune le nombre 2 . On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Soient les événements :

1. (A) "Obtenir deux boules portant le même nombre"
2. (B) "Obtenir deux boules de couleurs différentes".
3. (C) "Obtenir deux boules portant deux nombres dont la somme est égale à 3" .

1. Montrer que $P(A) = \frac{13}{22}$; $P(B) = \frac{6}{11}$ et Calculer $P(C)$

2. a) Montrer que $p(A \cap B) = \frac{3}{11}$

b) Les événements A et B sont-ils indépendants? Justifier la réponse.

3. Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité pour que les deux boules tirées portent le même nombre.

EXERCICE N°3

Une urne contient 3 boules blanches ; 4 boules noires et 5 boules rouges , (Les boules sont indiscernables au toucher) .

On tire au hasard , simultanément , trois boules de l'urne .

1. On considère les événements :

a) (A) "Obtenir trois boules de même couleur"

b) (B) "Obtenir trois boules de trois couleurs différentes" .

a) Calculer $P(A)$

b) Calculer $P(B)$

2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de couleurs que portent ces boules .

a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$