

# 1<sup>ère</sup> BAC

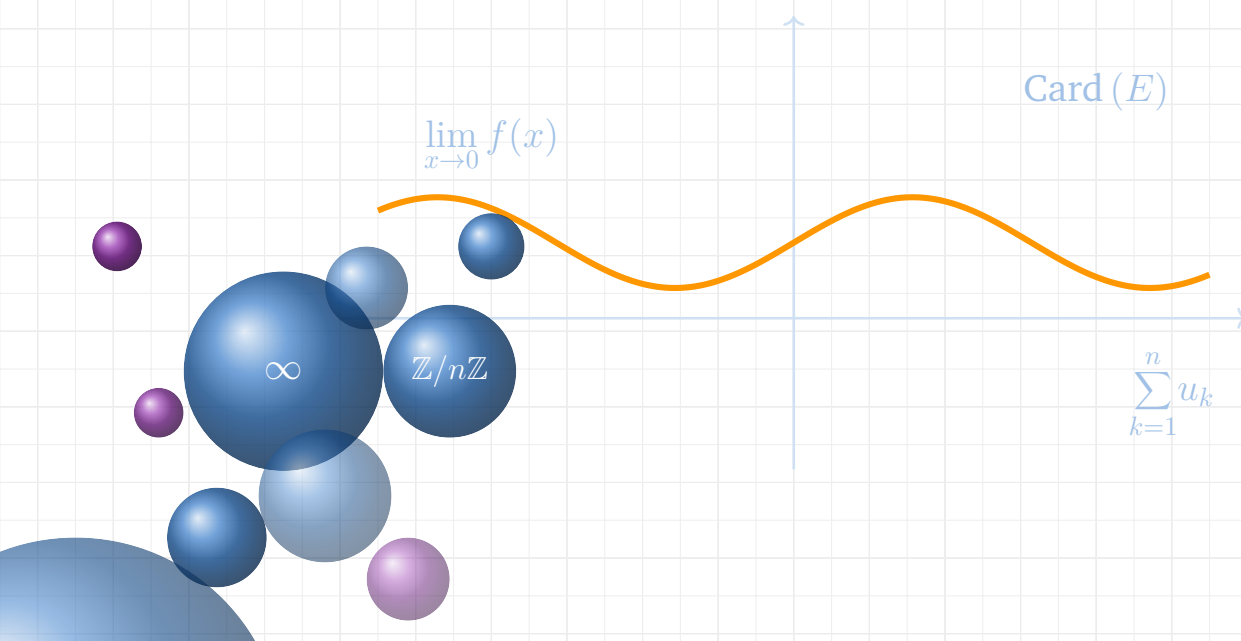
## SCIENCES MATHÉMATIQUES



## DEVOIRS À LA MAISON

### Mathématiques

Première Année – Sciences Mathématiques





# DEVOIR À LA MAISON N°1

À RENDRE LE > \_\_\_ // \_\_\_ // \_\_\_

## Exercice N°

1

1. Ecrire avec les quantificateurs chacune des propositions suivantes :

- le produit de deux entiers naturels consécutifs est un nombre pair.
- Si on multiplie les membres d'une inégalité par un même nombre réel strictement négatif, alors cette inégalité change de sens
- Les nombres réels  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  ne sont pas tous nuls.

2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $3n^2 + 5n + 1$  est impair :

- ✓ Par disjonction des cas
- ✓ Par récurrence
- ✓ Par l'absurde

3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , le nombre  $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$  est divisible par 111

4. Soient  $p$  et  $q$  deux propositions. Montrer que la formule :

$$[(p \implies q) \implies q] \iff (p \vee q)$$

est une loi logique.

## Exercice N°

2

1. On souhaite résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$

Notons  $S$  l'ensemble des solutions de cette équation.

En utilisant le raisonnement par équivalence successives, montrer que :  $S = \{-1\}$

2. On pose  $A = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ,  $B = \{7k \mid k \in \mathbb{N}\}$  et  $C = \{35k \mid k \in \mathbb{N}\}$   
Montrer que :  $A \cap B = C$

3. On pose  $A = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ,  
 $B = \{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  et  
 $C = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Montrer que :  $A \cap B = \emptyset$  et que  $A \cup B = C$

4.  $A, B$  et  $C$  sont trois ensembles non vides tels que :  $A \cup B = A \cap C$ ;  $B \cup C = B \cap A$  et  $C \cup A = C \cap B$ .

Montrer que  $A = B = C$

## Exercice N°

3

On considère l'application :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$$

- Déterminer  $f^{-1}(\{\frac{1}{4}\})$
  - L'application  $f$  est-elle injective ? (Justifier la réponse)
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $f(x) = 2$
  - L'application  $f$  est-elle surjective ? (Justifier la réponse)
- Déterminer une condition sur le réel  $y$  pour que l'équation  $f(x) = y$  admette des solutions dans  $\mathbb{R}$
  - Déterminer un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  pour que l'application :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow J$$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

soit surjective.

4. Déterminer un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  pour que l'application :  $h: I \rightarrow J$

$$x \mapsto h(x) = f(x)$$

soit bijective.

5. Déterminer l'expression de la bijection réciproque  $h^{-1}$



# DEVOIR À LA MAISON N° 2

À RENDRE LE > \_\_\_ // \_\_\_ // \_\_\_

## Exercice N°

1

1. On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$  et  $g(x) = \sqrt{4 - x}$

- Déterminer  $D_{g \circ f}$  puis calculer  $g \circ f(x)$  pour tout  $x$  dans  $D_{g \circ f}$
- Déterminer  $D_{f \circ g}$  puis calculer  $f \circ g(x)$  pour tout  $x$  dans  $D_{f \circ g}$

2. On considère la fonction :

$$d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x) = x - E(x)$$

- Calculer :  $d(-5)$ ;  $d(\sqrt{2})$ ;  $d(8)$ ;  $d(\frac{3}{2})$  et  $d(5.2)$
- Donner deux nombres réels différents, qui n'ont pas même signe et qui vérifient :  $d(x) = 0.3$
- Vérifier que :  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq d(x) < 1$
- Montrer que  $d$  est périodique de période 1
- Tracer la représentation graphique de  $d$  sur l'intervalle  $[-4; 4]$
- Résoudre graphiquement sur l'intervalle  $[-4; 4]$  l'équation :  $d(x) = x - 2$
  - Résoudre graphiquement sur l'intervalle  $[-4; 4]$  l'équation :  $d(x) = \frac{1}{2}$
- On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{1}{d(x)}$ 
  - Déterminer l'ensemble de définition de  $g$
  - Montrer que  $g$  est périodique
  - Etudier la monotonie de  $g$  sur l'intervalle  $]k; k + 1[$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

## Exercice N°

2

$ABCD$  est un quadrilatère et  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ .  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[BC]$ .  $L = \text{bary}\{(A, 1); (D, 3)\}$ ;  $K = \text{bary}\{(C, 1); (D, 3)\}$  et  $H = \text{bary}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 3)\}$ .

1. Faire une figure en justifiant la construction des points  $L$ ;  $K$  et  $H$ .

2. a. Démontrer que  $H$  appartient à la droite  $(DG)$ .

b. Montrer que  $H$  appartient à la droite  $(JL)$ .

c. Montrer que  $(IK)$ ;  $(JL)$  et  $(DG)$  sont concourantes.

3. Déterminer  $(\mathcal{E}_1)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\|\vec{MA} + 3\vec{MD}\| = \|\vec{MC} + 3\vec{MD}\|$

4. Déterminer  $(\mathcal{E}_2)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\vec{MA} + 3\vec{MD} = \vec{MC} - \vec{MD}$

5. Déterminer  $(\mathcal{E}_3)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + 3\vec{MD} = \vec{O}$

6. Déterminer  $(\mathcal{E}_4)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\frac{MA}{MD} = 3$

## Exercice N°

3

Dans le plan  $(\mathcal{P})$  muni du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points  $A(1, 2)$ ;  $B(-3, 0)$ ;  $C(-5, 4)$  et  $M(x, y)$

- Calculer  $\overrightarrow{BA}$ ;  $\overrightarrow{BC}$  et
  - Calculer  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
  - Calculer  $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$  et  $\sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$
  - En deduire la nature du triangle  $ABC$
  - Calculer l'aire du triangle  $ABC$
- Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(\Delta_1)$  médiatrice de  $[A, B]$
- Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(\Delta_2)$  médiatrice de  $[A, C]$
- Déterminer le centre et le rayon du cercle  $(\mathcal{C}_1)$  circonscrit au triangle  $ABC$
- Donner une équation cartésienne du cercle  $(\mathcal{C}_1)$ .
- Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $MA^2 + MC^2 = AC^2$

a. Montrer que  $(\Gamma)$  est un cercle dont on précisera le rayon  $R$  et le centre  $\Omega$

b. Déterminer l'intersection de l'axe des abscisses avec l'ensemble  $(\Gamma)$



# DEVOIR À LA MAISON N° 3

À RENDRE LE > \_\_\_ // \_\_\_ // \_\_\_

## Exercice N°

1

Soit  $ABC$  un triangle.

1. a. Montrer que  $\forall M \in (\mathcal{P})$   

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$
 b. En déduire que les hauteurs du triangle  $ABC$  sont concourantes en un point  $H$ .
2. Soient  $\Omega$  le centre du cercle passant par les points  $A, B$  et  $C$ .  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$  et  $K$  le point du plan tel que  $\overrightarrow{\Omega K} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$ .

- a. Montrer que  $K = H$
- b. En déduire que les points  $\Omega, G$  et  $H$  sont alignés.

## Exercice N°

2

1. a. Vérifier que  

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$
 b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  

$$\sin \theta = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$$
 c. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  

$$(3 - \sqrt{3}) \cos \theta - (3 + \sqrt{3}) \sin \theta = \sqrt{6}$$

2. On considère l'équation :

$$(E) \quad \cos(4x) = \sin x$$

- a. Résoudre dans l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  l'équation  $(E)$
- b. Vérifier que :  

$$\begin{aligned} \cos(4x) &= 1 - 2\sin^2(2x) \\ &= 8\sin^4(x) - 8\sin^2(x) + 1 \end{aligned}$$
- c. En déduire que  

$$(E) \iff (X = \sin x) \wedge ((F) : 8X^4 - 8X^2 - X + 1 = 0)$$

d. Vérifier que :

$$\begin{aligned} &8X^4 - 8X^2 - X + 1 \\ &= (X - 1)(2X + 1)(4X^2 + 2X - 1) \end{aligned}$$

- e. En déduire les solutions de l'équation  $(F)$
- f. En déduire la valeur exacte de  $\sin \frac{\pi}{10}$ .

## Exercice N°

3

1. On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{3u_n - 1} \end{cases}$$

On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq \frac{1}{3}$

- a. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$
- b. On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}.$$
  - i. Montrer que la suite  $(v_n)$  est arithmétique (Préciser sa raison et son premier terme)
  - ii. Écrire  $v_n$  en fonction de  $n$
  - iii. Calculer  $\sum_{k=1}^{20} v_k$

2. On considère la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} w_0 \in [0; 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + w_n}{2}} \end{cases}$$

- a. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq w_n \leq 1$
- b. Montrer que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante
- c. On suppose que  $w_0 = \cos(\varphi)$  avec  $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$ .

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$ .



# DEVOIR À LA MAISON N° 4

À RENDRE LE > \_\_\_ // \_\_\_ // \_\_\_

## Exercice N°

1

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} & \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .
2. Vérifier que la suite  $(u_n)$  n'est pas géométrique.
3. On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  
 $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$ .

- a. Calculer  $v_0$  et  $v_1$ .
- b. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique (préciser sa raison et son premier terme).
- c. Écrire  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- d. Calculer la somme  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$  en fonction de  $n$ .

4. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 7 - \frac{3}{2^n}$ .

## Exercice N°

2

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .
2. Calculer la limite  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
3. Calculer la limite  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .

4. Calculer les limites suivantes :

- a.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{3x - \pi}$
- b.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7x+2} - 4}{x - 2}$
- c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$
- d.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x)$
- e.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$
- f.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x - \sin(2x)}{x^2}$

5. a. Montrer que :

$$x \in [-1; 1] \Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{x+2}{x+5} \leq \frac{3}{4}.$$

- b. En utilisant la définition formelle de la limite, montrer que  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 5} = 1$ .

## Exercice N°

3

$ABCD$  est un carré tel que  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

1. Construire le triangle équilatéral  $BIC$  à l'intérieur du carré  $ABCD$ .
2. Construire le triangle équilatéral  $DCJ$  à l'extérieur du carré  $ABCD$ .
3. Construire le point  $E$  tel que le triangle  $ACE$  soit équilatéral et que le point  $B$  soit à son intérieur.
4. Déterminer les images des points  $D, B$  et  $E$  par la rotation  $r$  de centre  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .
5. Montrer que les points  $I, J$  et  $A$  sont alignés.



# DEVOIR À LA MAISON N° 5

À RENDRE LE > \_\_\_ // \_\_\_ // \_\_\_

## Exercice N°

1

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 2 a pour équation :

$$(T) : y = -x + 7$$

1. a. Quelle est la valeur du nombre dérivé  $f'(2)$  ?  
b. Calculer  $f(2)$ .
2. a. Donner l'approximation affine de  $f(2+h)$  pour  $h$  voisin de 0.  
b. En déduire une valeur approchée de  $f(2.003)$ .

## Exercice N°

2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; \pi]$  par :  $f(x) = \sin x$ .  $(\mathcal{C}_f)$  désigne la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal.

1. Montrer que  $(\mathcal{C}_f)$  est concave sur  $[0; \pi]$ .
2. Déterminer l'équation de la tangente à  $(\mathcal{C}_f)$  au point d'abscisse  $\frac{\pi}{3}$ .
3. En déduire que si  $a, b$  et  $c$  sont les mesures des angles d'un triangle alors :

$$\sin a + \sin b + \sin c \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

## Exercice N°

3

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$  et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (d'unité 3 cm).

1. Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Étudier la parité de la fonction  $f$ .
3. Calculer les limites aux bornes de  $D_f$ .
4. Étudier les branches infinies de la courbe représentative de  $f$ .
5. Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.
6. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  dans  $]1; +\infty[$ .
7. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
8. Montrer que la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  admet un point d'inflexion d'abscisse positive.
9. Tracer dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .
10. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel  $m$ , le nombre de solutions de l'équation :

$$\sqrt{x^4 - x^2} - m = 0$$



# DEVOIR À LA MAISON N° 6

À RENDRE LE > \_\_\_ // \_\_\_ // \_\_\_

## Exercice N°

1

$ABCDEFGH$  est un parallélépipède rectangle.

1.  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs des côtés  $[BF]$  et  $[DH]$ .

a. Exprimer  $\vec{IJ}$  en fonction de  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$ .

b. Exprimer  $\vec{DC}$  en fonction de  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$ .

c. Exprimer  $\vec{FC}$  en fonction de  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$ .

d. Montrer que les vecteurs  $\vec{DC}$  et  $\vec{FC}$  ne sont pas colinéaires.

e. Les vecteurs  $\vec{IJ}$ ,  $\vec{DC}$  et  $\vec{FC}$  sont-ils coplanaires? (Justifier la réponse).

2. Les points  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  et  $S$  sont tels que :  $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AE}$ ,  $Q$  milieu de  $[HG]$ ,  $R$  milieu de  $[CD]$  et  $\vec{AS} = -\frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AD}$ .

a. Exprimer  $\vec{PQ}$ ,  $\vec{PR}$  et  $\vec{PS}$  en fonction de  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$ .

b. Montrer que  $\vec{PQ}$ ,  $\vec{PR}$  et  $\vec{PS}$  sont coplanaires.

## Exercice N°

2

Dans l'espace muni du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les plans :

✓  $(P_1) : x + y - z + 1 = 0$

✓  $(P_2) : x + 2y - 2z - 1 = 0$

✓  $(P_3) : x + y - z + 2 = 0$

et les droites :  $(D_1) : \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$  et

$(D_2) : \begin{cases} x + 2 = y - 2 \\ z = 0 \end{cases}$

1. Déterminer une représentation paramétrique du plan  $(P_3)$ .

2. Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite  $(D_1)$ .

3. Montrer que les plans  $(P_1)$  et  $(P_2)$  sont sécants suivant la droite  $(D_1)$ .

4. Déterminer l'intersection des deux plans  $(P_1)$  et  $(P_3)$ .

5. Déterminer l'intersection de la droite  $(D_1)$  avec le plan  $(P_3)$ .

6. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(D_2)$ .

7. Montrer que les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont non coplanaires.

8. Déterminer  $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3)$ .



# DEVOIR À LA MAISON N° 7

À RENDRE LE > \_\_\_ // \_\_\_ // \_\_\_

## Exercice N°

1

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

1. Une urne contient  $n$  boules blanches et  $n$  boules noires. On tire simultanément  $n$  boules de l'urne.

- a. Calculer de deux manières différentes le nombre de tirages possibles.
- b. En déduire l'égalité :

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n \quad (1)$$

2. En utilisant le coefficient de  $x^n$  dans le développement de  $(1+x)^{2n}$ , démontrer l'égalité (1).  
(Remarquer que  $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$ )

## Exercice N°

2

Une urne contient cinq boules rouges, trois boules vertes et quatre boules noires. On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Calculer le nombre de possibilités d'obtenir trois boules rouges.
3. Calculer le nombre de possibilités d'obtenir exactement deux boules rouges.
4. Calculer le nombre de possibilités d'obtenir au moins une boule rouge.
5. Calculer le nombre de possibilités d'obtenir deux boules vertes et une boule noire.
6. Calculer le nombre de possibilités d'obtenir trois boules de la même couleur.

7. Calculer le nombre de possibilités d'obtenir trois boules de couleurs différentes.

## Exercice N°

3

L'espace  $(\mathcal{E})$  est rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère le plan  $(\mathcal{P})$  passant par le point  $A(3, 1, 2)$  et admettant  $\vec{n}(1, -4, 1)$  comme vecteur normal, la droite  $(\mathcal{D})$  passant par le point  $B(1, 4, 2)$  et dirigée par  $\vec{u}(1, 1, 3)$ , et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(1, 9, 0)$  passant par  $A$ .

1. Donner une équation cartésienne du plan  $(\mathcal{P})$ .
2. Montrer que la droite  $(\mathcal{D})$  et le plan  $(\mathcal{P})$  sont strictement parallèles.
3. Calculer la distance du point  $\Omega$  au plan  $(\mathcal{P})$ .
4. Calculer le rayon de la sphère  $(S)$  puis en déduire l'intersection du plan  $(\mathcal{P})$  et de la sphère  $(S)$ .
5. Donner une représentation paramétrique de la droite  $(\mathcal{D})$ .
6. Donner une équation cartésienne de la sphère  $(S)$ .
7. Déterminer l'intersection de la droite  $(\mathcal{D})$  et de la sphère  $(S)$ .
8. Déterminer les coordonnées du point  $H$ , projection orthogonale du point  $B$  sur le plan  $(\mathcal{P})$ .
9. Donner une équation cartésienne de la sphère  $(S')$  de centre  $B$  et tangente au plan  $(\mathcal{P})$ .



# DEVOIR À LA MAISON N° 8

À RENDRE LE > \_\_\_ // \_\_\_ // \_\_\_

## Exercice N°

1

- Déterminer  $PGCD(527, 408)$  en utilisant l'algorithme d'Euclide.
- Décomposer les nombres 408 et 527 en produits de facteurs premiers.
  - En déduire  $PPCM(408, 527)$ .
  - En déduire le nombre de diviseurs positifs de 408.
- Soit  $a = 2222^{3333} + 3333^{2222}$ .
  - Vérifier que  $2222 \equiv 2[5]$  et que  $3333 \equiv 3[5]$ .
  - Vérifier que  $3^4 \equiv 1[5]$  et que  $2^4 \equiv 1[5]$ .
  - En déduire que  $5 \mid (a - 1)$ .
- Soit  $(a, b, x) \in \mathbb{Z}^3$  et  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ .
  - Montrer que  $a \equiv b[n] \implies xa \equiv xb[n]$ .
  - L'implication réciproque est-elle vraie? (Justifier votre réponse)
- Montrer que  $a \equiv b[n] \implies a^2 \equiv b^2[n]$ .
  - L'implication réciproque est-elle vraie? (Justifier votre réponse)
- Déterminer les entiers naturels  $n$  pour lesquels le nombre  $3n^2 + 8n + 5$  est premier.
- Soit  $p$  un nombre premier positif et différent de 3.  
Démontrer que  $8p^2 + 1$  n'est pas premier.

## Exercice N°

2

- Dans l'espace  $E$  rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  et  $C(0, 0, 1)$ .

- Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(D)$  passant par  $O$  et orthogonale au plan  $(ABC)$ .
- Soit  $(\Delta)$  l'ensemble des points  $M$  tels que :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = (\sqrt{3} - 1)(\vec{i} + \vec{j}) - \vec{k}$$

- Montrer que  $\Omega(1, 1, \sqrt{3} - 1)$  appartient à l'ensemble  $(\Delta)$ .
  - En déduire que l'ensemble  $(\Delta)$  est la droite passant par  $\Omega$  et dirigée par  $\overrightarrow{AB}$ .
- Soient  $A, B, C$  et  $M$  quatre points de l'espace  $E$ . Montrer que :

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

- Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points non coplanaires de l'espace  $E$ . Déterminer l'ensemble des points  $M$  de l'espace  $E$  vérifiant :

$$(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}) = \vec{0}$$