

1^{ère} BAC

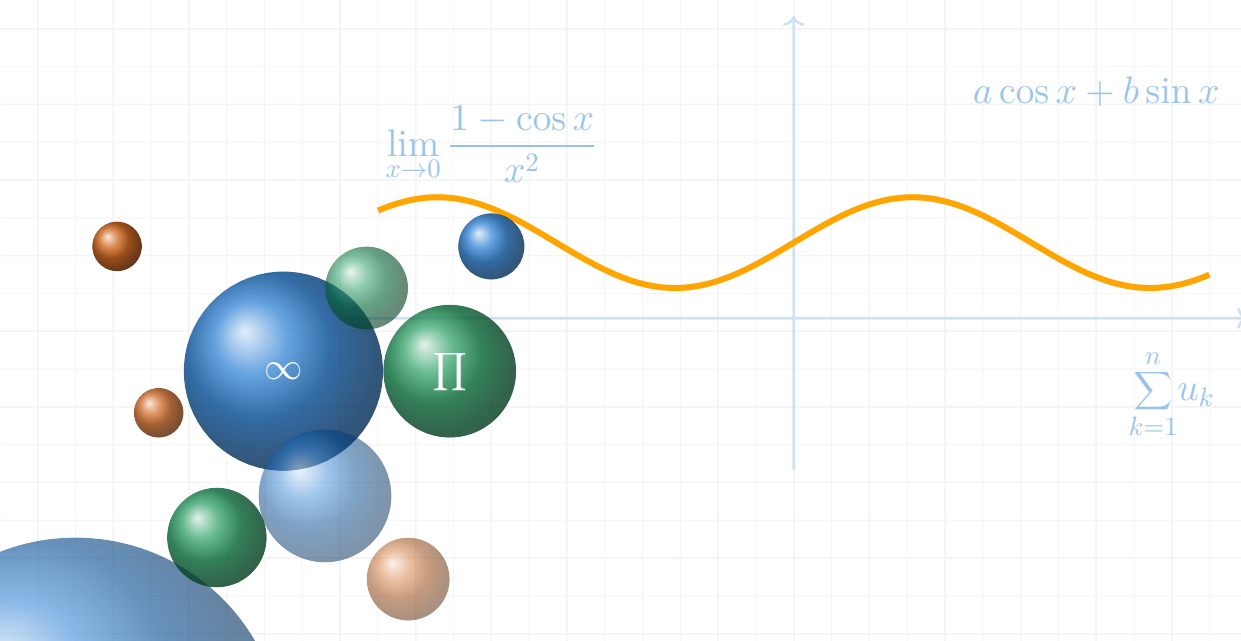
SCIENCES EXPÉRIMENTALES



DEVOIRS À LA MAISON

Mathématiques

Première Année – Sciences Expérimentales





DEVOIR À LA MAISON N° 01

À RENDRE LE > ___ // ___ // ___

EXERCICE 1

1. Ecrire la négation des propositions suivantes et préciser laquelle est vraie :

a. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \implies x^2 \neq y^2$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = 2 \implies x = 2$

c. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{3}$

2. Soient a ; b et c trois nombres réels .
Montrer que :

$$a + b + c \neq 0 \implies \begin{cases} a + b \neq 0 \\ \text{ou} \\ b + c \neq 0 \\ \text{ou} \\ c + a \neq 0 \end{cases}$$

3. En utilisant les équivalences successives, résoudre dans $\mathbb{R}$; l'équation :

$$\sqrt{x-2} = x-2$$

4. En utilisant un raisonnement par l'absurde , montrer que :

$$\forall (k, k') \in \mathbb{Z}^2, 2k \neq 2k' + 1$$

5. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , le nombre $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7

EXERCICE 2

On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = 2x^2 - 3$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$

2. On pose $h = g \circ f$

a. Déterminer $\mathcal{D}_h$ l'ensemble de définition de h .

b. calculer $h(x)$ pour tout x dans $\mathcal{D}_h$

c. vérifier que $h(1) = -3$ et que $h(4) = 3$

d. Construire $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ dans un repère orthornormé

e. En déduire que l'équation :

$$x \in [1; +\infty[: \sqrt{x-1} - 2x + 5 = 0$$

admet une solution unique α tel que $3 < \alpha < 4$

f. On donne $\alpha = \frac{13}{4}$; résoudre graphiquement dans l'intervalle $[1; +\infty[$ l'inéquation $\sqrt{x-1} > 2x-5$

3. On pose $k = f \circ g$

a. Déterminer $\mathcal{D}_k$ l'ensemble de définition de k .

b. vérifier que $k(x) = \sqrt{2x^2 - 4}$ pour tout x dans $\mathcal{D}_k$

c. Etudier la parité de la fonction k

d. En utilisant la monotonie de la composée de deux fonction , étudier les variations de k sur l'intervalle $[\sqrt{2}; +\infty[$

e. En déduire les variations de k sur $\mathcal{D}_k$



DEVOIR À LA MAISON N° 02

À RENDRE LE > ___ // ___ // ___

EXERCICE 1

$ABCD$ est un quadrilatère et G est le centre de gravité du triangle ABC . I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$. On pose :

- ✓ $L = \text{bary}\{(A, 1); (D, 3)\}$
- ✓ $K = \text{bary}\{(C, 1); (D, 3)\}$
- ✓ $H = \text{bary}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 3)\}$

1. Faire une figure en justifiant la construction des points L ; K et H .
2.
 - a. Démontrer que H appartient à la droite (DG) .
 - b. Montrer que H appartient à la droite (JL) .
 - c. Montrer que (IK) ; (JL) et (DG) sont concourantes.

3. Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

- ✓ $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\|$
- ✓ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{DM}$
- ✓ $\frac{MA}{MD} = 3$

EXERCICE 2

Dans le plan $(\mathcal{P})$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-1, 0)$; $B(2, 0)$; $C(0, 3)$; $\Omega(3, 0)$ et $M(x, y)$

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
2. Calculer l'aire du triangle ABC
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) médiatrice de $[C, \Omega]$
4. Donner une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C}_1)$ de diamètre $[C, \Omega]$
5. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C}_2)$ circonscrit au triangle ABC
6. Montrer que :

$$4MB^2 = MA^2 \iff x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$$

7. Déterminer (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $4MB^2 = MA^2$
8. Déterminer l'intersection de la droite (Δ) avec l'ensemble (Γ)



DEVOIR À LA MAISON N° 03

À RENDRE LE > ___ // ___ // ___

EXERCICE 1

- Déterminer l'équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ tel que $A(2, 0)$ et $B(0, 2)$
- Vérifier $O(0, 0) \in (\mathcal{C})$ puis déterminer une équation cartésienne de (Δ) la tangente à $(\mathcal{C})$ en O

EXERCICE 2

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = \sqrt{2}$
 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{3} \cos(x) - \sin x - 3 > 0$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) , $\cos(4t) = 0$
 - Ecrire $\cos(4t)$ en fonction de $\cos t$.
 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (F) , $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$
 - En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{3\pi}{8}$.

EXERCICE 3

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{3u_n - 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et on suppose}$$

que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq \frac{1}{3}$

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$
- On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$
 - Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique (Préciser sa raison et son premier terme)
 - Calculer v_n puis u_n en fonction de n
 - Calculer en fonction de n la somme $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$
- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
 - Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$
 - On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$
 - Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite géométrique (Préciser sa raison et son premier terme).
 - déterminer v_n puis u_n en fonction n
 - Calculer la somme $\sum_{k=0}^9 v_k$



DEVOIR À LA MAISON N° 04

À RENDRE LE > ___ / ___ / ___

EXERCICE 1

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x}$$

- Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f
- Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f

2. Calculer les limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x^3 + 8}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{|2x^2 - 3x + 1|}{x^2 - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{4+x^2}}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{\sqrt{4+x^2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \sin\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 + 2x - 15}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

EXERCICE 2

ABC un triangle rectangle et isocèle en B tel que $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre C et de rayon AB coupe $[AC]$ en D . la médiatrice de $[AD]$ coupe $[BC]$ en O

1. Construire la figure .

2. On considère la rotation r telle que

$$r(D) = A \text{ et } r(C) = B$$

- Montrer que le point O est le centre de la rotation r
- Montrer que $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OC})[2\pi]$

3. Déterminer puis construire $(\mathcal{C}')$ l'image de $(\mathcal{C})$ par la rotation r

4. Construire les points F et G tels que

$$\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

- Déterminer les réels $\alpha; \beta; a$ et b tels que : $F = \text{bary}\{(C, \alpha); (D, \beta)\}$ et $G = \text{bary}\{(A, a); (B, b)\}$
- Montrer que le point G est l'image du point F par la rotation r
- Montrer que les médiatrices de $[AD]; [FG]$ et $[BC]$ se rencontrent en un point à préciser .

5. Déterminer l'angle de la rotation de centre B et qui transforme C en A



DEVOIR À LA MAISON N° 05

À RENDRE LE > ___ // ___ // ___

EXERCICE 1

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ en 2 a pour équation $(T) : y = -x + 7$

1. Déterminer $f(2)$ et $f'(2)$
2. Déterminer une valeur approchée du nombre $f(2 + h)$ lorsque h est voisin de 0
3. En déduire une valeur approchée du nombre $f(2.003)$

EXERCICE 2

On considère la fonction g définie par

$$\begin{cases} g(x) = x + \frac{1}{x+1} & ; \quad x \geq 0 \\ g(x) = -x + \frac{1}{x+1} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_g$ l'ensemble de définition de g
2. Calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_g$
3. Etudier la dérivabilité de g en 0 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu
4. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$
5. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$
6. Dresser le tableau de variation de g

7. Calculer $g''(x)$ pour tout $x \in I =]0, +\infty[$ puis étudier son signe sur I

EXERCICE 3

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

1. I et J sont les milieux respectifs des côtés $[BF]$ et $[DH]$.
 - a. Exprimer $\vec{IJ}$ fonction de $\vec{AB}$; $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$
 - b. Exprimer $\vec{DC}$ fonction de $\vec{AB}$; $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$
 - c. Exprimer $\vec{FC}$ fonction de $\vec{AB}$; $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$
 - d. Montrer que les vecteurs $\vec{DC}$ et $\vec{FC}$ ne sont pas colinéaires.
 - e. Les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{DC}$ et $\vec{FC}$ sont-ils coplanaires? (Justifier la réponse).
2. les points P ; Q ; R et S sont tels que : $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AE}$; Q milieu de $[HG]$; R milieu de $[CD]$ et $\vec{AS} = -\frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AD}$.
 - a. Exprimer $\vec{PQ}$; $\vec{PR}$ et $\vec{PS}$ en fonction de $\vec{AB}$; $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$
 - b. Montrer que $\vec{PQ}$; $\vec{PR}$ et $\vec{PS}$ sont coplanaires



DEVOIR À LA MAISON N° 06

À RENDRE LE > ___ // ___ // ___

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x^2} & ; \quad x \leq 0 \\ f(x) = -x + \frac{1}{x+1} & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f
- Calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$; étudier les branches infinies de la courbe représentative de f et préciser sa position relative par rapport à la droite $y = -x$
- Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus .
- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$
- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$
- Dresser le tableau de variation de f
- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé
- Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ que l'inéquation : $-x < f(x) \leq -x + 1$

EXERCICE 2

Dans l'espace muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

on considère les plans $\begin{cases} (P_1) : x + y - z + 1 = 0 \\ (P_2) : x + 2y - 2z - 1 = 0 \\ (P_3) : x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$

et les droites $(D_1) \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$ et

$(D_2) \begin{cases} x + 2 = y - 2 \\ z = 0 \end{cases}$

- Déterminer une représentation paramétrique du plan (P_3)
- Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite (D_1)
- Montrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants suivant la droite (D_1)
- Déterminer l'intersection des deux plans (P_1) et (P_3)
- Déterminer l'intersection de la droite (D_1) avec le plan (P_3)
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D_2)
- Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires